El plano hiperbólico, de la geometría a la teoría de números

Florent Schaffhauser
Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes
florent@uniandes.edu.co

Del 10 al 15 de julio del 2017 se llevó a cabo, en la Universidad de Los Andes, una escuela de verano titulada *Aritmética y Sistemas Dinámicos*. Ese evento, organizado en el marco del año de intercambio Colombia-Francia (el cual abarca todas las áreas de la cultura, los artes y el conocimiento científico), reunió a 71 estudiantes, procedentes de toda Colombia, de Chile y de México. La originalidad de la escuela fue presentar, en una misma semana, temas que a menudo son vistos como ajenos el uno del otro. Aritmética y Sistemas Dinámicos difieren mucho, tanto por el vocabulario que utilizan los investigadores en cada campo como por las preocupaciones de los mismos. Sin embargo, el punto de partida de cada uno de ellos es y seguirá siendo el plano hiperbólico. Es este objeto compartido del cual hablaremos en este artículo. Para entender de qué se trata, es necesario recordar primero la noción de geometría no-euclidiana.

Los Elementos de Euclides

La geometría euclidiana fue codificada en el tratado conocido como *Los Elementos de Euclides*. Se estima que esa obra fue escrita unos trescientos años a.C. y se atribuye la paternidad de la misma al matemático griego Euclides (ca. 325 a.C.-ca. 265 a.C.), al cual podemos ver representado de forma idealizada en el siguiente grabado del siglo XVI.

Figura 1 - Euclides (visión idealizada)

Se sabe muy poco de la vida de Euclides (¡o si existió siquiera!) pero el legado matemático del tratado conocido como *Los Elementos de Euclides* es inmenso y su posteridad notable. Recordemos por ejemplo que Nicolás Bourbaki, el colectivo matemático anónimo creado en Francia en 1937, tituló su obra *Elementos de Matemática* en referencia directa a Euclides (y para resaltar el origen histórico del método axiomático). El tratado de Euclides consta de trece libros, organizados por tema:

- Libros I a VI: geometría plana,
- Libros VII a X: aritmética,
- Libros XI a XIII: geometría en el espacio.

Axiomas y teoremas

El hilo director de *Los Elementos de Euclides* es el método axiomático: a partir de unos *enunciados dignos de ser aceptados* como punto de partida de un discurso racional (esa es la etimología de la palabra *axioma*), se *demuestran* otros enunciados llamados teoremas (por definición, en matemáticas, un teorema es un enunciado que puede… ¡ser demostrado!). Esa manera de proceder se ha vuelto la norma y, exagerando un poco, la esencia de toda la matemática moderna: cuando los matemáticos del siglo XIX empezaron a preocuparse por el rigor de sus demostraciones y la cuestión de los fundamentos (la llamada *aritmetización del análisis* de Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857) y Weierstrass (1815-1897), y la *revolución conjuntista* iniciada por Cantor (1845-1918), de la cual Bourbaki se haría luego el principal promotor), todos veían en el tratado de Euclides un modelo a seguir. Pero el interés para ese texto iba mucho más allá del método axiomático. Euclides, a pesar del rigor de sus demostraciones, se apoyaba mucho en la llamada intuición geométrica y, si bien su manera de razonar *sobre las figuras* permanece hoy en día de una actualidad inconcebible en cualquier otra área del conocimiento, resulta imposible negar que muchos de los términos que él consideraba evidentes, empezando por la noción de recta, carecían de una definición precisa. Y a raíz de eso, el famoso *axioma de las paralelas* no dejaba de asombrar a los matemáticos, dos mil años después de Euclides.

Los axiomas del plano euclidiano

Guardémonos de cometer un anacronismo: para Euclides, el plano euclidiano *no es* un plano de coordenadas (x,y) dotado de alguna estructura adicional (semejante frase simplemente no hubiese tenido sentido para él); existe un solo plano, el cual venía con rectas, círculos, etc. La noción de punto es intuitiva, así como la noción de distancia, y se acepta que en ese plano los siguientes enunciados son ciertos:

1. Por dos puntos distintos pasa una única *recta*.
2. Cualquier segmento de recta puede ser extendido infinitamente a ambos lados.
3. Dos ángulos rectos cualesquiera son *congruentes*, es decir que uno puede llevar el uno al otro utilizando una sucesión de traslaciones, rotaciones y reflexiones (que son los *desplazamientos* del plano).
4. Dado un segmento de recta, digamos de extremidades A y B, existe una figura llamada *círculo*, cuyos puntos se caracterizan por lo que están todos a la misma *distancia* de A que el punto B.
5. Dado una recta D y un punto A que no pertenece a D, existe una única recta D' que pasa por A y es *paralela* a D (es decir, sin punto de intersección con D en el plano).

Esta formulación del quinto axioma (o *postulado*, como se solía decir) no es la formulación original de Euclides pero le es equivalente (y es más entendible). De manera intuitiva, ese "*axioma de las paralelas"*, por su aparente complejidad, tiene un estatus distinto al de los anteriores: no simplemente afirma la existencia de algo intuitivo (una recta, un círculo) sino que pide que ese algo cumpla con una propiedad adicional. Quizá por esa razón haya sido legítimo pensar que el quinto axioma fuera un teorema, es decir que se pudiera demostrar a partir de los otros cuatro. Muchos matemáticos lo intentaron (Wallis (1616-1703), Saccheri (1667-1733) y Lambert (1728-1777), entre los más ilustres) pero la humanidad tuvo que esperar hasta el siglo XIX para saber que no era así: el último axioma no es consecuencia de los anteriores.

Gauss, Lobachevski y Bolyai

La manera como se entendió esto es triplemente interesante. Primero porque requiere un pequeño esfuerzo de abstracción, segundo porque abrió un campo de investigación que no ha dejado de sorprendernos y, tercero, porque la historia de este descubrimiento conlleva algo del romanticismo de la época en la cual ocurrió. Para demostrar que el axioma de las paralelas no es consecuencia de los cuatro anteriores, es *suficiente* demostrar que existen geometrías planas en las cuales los primeros cuatro axiomas son ciertos y el quinto no. Lobachevski (1792-1856) y Bolyai (1802-1860) publicaron sus construcciones de tal *plano no-euclidiano* respectivamente en los años 1829 y 1832. Se considera que esos dos trabajos fueron realizados de forma independiente (es decir que Bolyai no tuvo conocimiento de los avances de Lobachevski), lo cual es fácil de imaginar teniendo en cuenta las dificultades de comunicación en aquella época (y, tal vez, el carácter de los protagonistas). El inmenso matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), al enterarse de los resultados de Lobachevski y Bolyai, afirmó haber descubierto años atrás (¡en el 1813!) la existencia de las geometrías no-euclidianas pero haber decidido no publicar nada, *"por temor a los gritos de los ignorantes"*. Independientemente de esas controversias se puede decir que, terminada la primera mitad del siglo XIX, se sabía que la geometría euclidiana no era la única posible. Sin embargo, la geometría de Lobachevski y Bolyai seguía siendo una curiosidad, a pesar de los esfuerzos de esos dos matemáticos, particularmente Lobachevski, quien le dedicó su vida a su descubrimiento y se esforzó hasta el último momento para difundirlo.

Riemann

Así era la situación del plano no-euclidiano cuando irrumpió el que iba a revolucionar la manera de hacer geometría. Oriundo de un medio rural y humilde (su padre era pastor luterano en una aldea del reino de Hanover), Bernhard Riemann obtuvo su tesis de doctorado en el 1851 en Göttingen, bajo la dirección de Gauss.

Figura 2 - Bernhard Riemann

En 1854, Riemann presentó una lista de tres temas ante un jurado, con el propósito de obtener su tesis de habilitación, un diploma que todavía es necesario en algunos países de Europa para llegar a conseguir un puesto permanente de profesor. De esos tres, Gauss escogió el que Riemann menos quería que se escogiera: *Sobre las hipótesis en las que se funda la geometría*. La sustentación de habilitación que siguió permanece hasta hoy como un momento clave en la historia de las matemáticas, pues fue una de las pocas veces, quizás la única, donde un concepto que había de revolucionar las matemáticas fue introducido en un instante tan determinado y por una sola persona. En un solo día, la geometría pasó de ser la del espacio dos o tres-dimensional que todos creemos conocer a la de las *variedades riemannianas*, de cualquier dimensión. La posteridad de esa noción es impresionante: hoy se conocen variedades topológicas, diferenciables, analíticas, algebraicas y hasta ¡variedades de dimensión infinita! Pero para el tema que nos atañe, el aporte fundamental de Riemann es la noción de *métrica*, a partir de la cual uno define todas las herramientas usuales de la geometría: longitudes de vectores, ángulos, longitudes de curvas, distancia entre dos puntos. Lo que era un dato inicial, casi físico, del problema en la geometría de Euclides, se vuelve ya un caso particular de una cantidad infinita de posibilidades; el salto conceptual es evidente.

Geodésicas

De particular importancia aquí es la noción de *geodésica* (el término como tal, lo introdujo Gauss), que en primera aproximación es una curva cuya longitud es igual a la distancia (en el sentido de Riemann) entre sus extremidades. Por ejemplo, las geodésicas (completas) de la métrica euclidiana del plano son las rectas que todos conocemos. Por lo tanto, si remplazamos el término de recta por el de geodésica completa en los primeros cuatro axiomas de Euclides, vemos abrirse en frente nuestro un mundo de posibilidades. Y Riemann en efecto aplicó inmediatamente ese nuevo marco abstracto, para mostrar que la *geometría esférica*, en la cual las geodésicas son arcos de grandes círculos, cumple con todos los axiomas de Euclides así reformulados, menos el último: por un punto exterior a una recta dada, no pasa ninguna paralela a esa recta (¡dos geodésicas completas cualesquiera de la esfera siempre se intersecan!). Los planos hiperbólicos de Lobachevski y Bolyai, al contrario, son variedades riemannianas en las cuales por un punto exterior a una recta dada, pasan dos paralelas a esa recta (y hasta una cantidad infinita si la definición de recta paralela a una recta dada es que no hay intersección en el plano, la otra definición posible siendo que hay exactamente un punto de intersección pero que ése se encuentra infinitamente lejos (la figura 3 ilustra ese fenómeno, ahí las geodésicas completas son los arcos de círculo ortogonales al borde del disco en el cual están trazados). Más impresionante aún, Riemann mostró que la noción de geodésica existe independientemente de cualquier hipótesis de positividad sobre la métrica, lo cual habría de jugar un papel muy importante en la teoría de la relatividad general, la cual emergió en el 1915, es decir 61 años después de la introducción de la noción de variedad riemanniana. Por lo tanto, el sistema *GPS*, que incorpora correcciones relativistas para determinar las coordenadas de un punto en la tierra, puede considerarse un descendiente directo aunque lejano de la investigación de Riemann. Quizá valga la pena notar que esa investigación, cuya importancia podemos dimensionar cada día cuando utilizamos nuestros celulares, nunca recibió apoyo financiero y Riemann murió de tuberculosis a los cuarenta años, en un estado de casi indigencia.

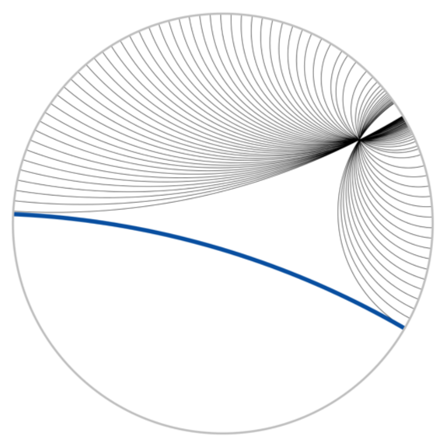

Figura 3 - El axioma de las paralelas en el plano hiperbólico

El disco de Poincaré

Como se sabe, Félix Klein (1849-1925) fue uno de los más brillantes e ilustres continuadores de Riemann, pero fue otro matemático el que supo verdaderamente popularizar la geometría hiperbólica, tanto entre sus colegas como para una audiencia más general, que la sacó de su estatus de curiosidad matemática y reveló al mundo todo el potencial que tenía: Henri Poincaré (1854-1912). Poincaré fue un erudito universal, activo en todas las áreas de la matemática y de la física de su época, y también dejó una obra filosófica consecuente. Según Poincaré, una geometría dada no es ni más ni menos verdadera que otra, simplemente puede resultar más cómoda, dependiendo del problema que uno esté considerando. Tal vez haya sido para convencernos a todos de eso que se empeñó en buscar el modelo más natural posible del plano hiperbólico, yendo hasta proponer un modelo físico para ello.

Figura 4 - Henri Poincaré

Con un mínimo esfuerzo de imaginación, nos dice Poincaré, podemos pensar en un mundo encerrado en el interior de un disco, en el cual la temperatura en un punto es cada vez más baja entre más cerca estemos del borde del disco, hasta llegar a un cero absoluto en ese borde. Y también podemos imaginar que los habitantes de ese mundo tienen la propiedad física que su tamaño es directamente proporcional a la temperatura que hace en el punto donde se encuentran. Por lo tanto, a medida que se acerquen del borde, se vuelven más pequeños y lo que, para un observador exterior, parece una misma distancia, se vuelve más largo de recorrer para ellos (y al borde no pueden llegar nunca, ¡ése se encuentra a una distancia infinita de ellos!). La noción matemática que se esconde detrás de esa descripción es la de *métrica conforme*: Poincaré buscó un modelo del plano hiperbólico en el cual los ángulos se midieran de la misma manera que los ángulos euclidianos clásicos. Para ello es suficiente encontrar una métrica que difiere de la métrica euclidiana clásica por un factor multiplicativo estrictamente positivo, llamado *factor conforme,* el cual es una cantidad variable: depende del punto en el que uno está (en otras palabras, es una función) y Poincaré muestra que, en un punto z del disco unidad, uno puede escoger la función $1/(1-|z|^2)$, donde $|z|$ es el módulo del número complejo z, como factor conforme, de manera que en el borde (de ecuación $|z|=1$) esa cantidad en efecto es infinita. Ese modelo es conocido como el *disco de Poincaré* y está representado en la figura 3: las geodésicas completas con los diámetros y los arcos de círculo ortogonales al borde.

Curvas elípticas

Poincaré además introdujo otro modelo conforme del plano hiperbólico, equivalente al disco anterior con su métrica de Poincaré. Se trata del semi-plano superior, denotado H y conformado por todos los números complejos de parte imaginaria estrictamente positiva. En este caso, el factor conforme es $1/\mathrm{Im}(z)$ (el inverso de la parte imaginaria del número complejo z) y las geodésicas son las rectas verticales y los semi-círculos ortogonales al eje real. Ese modelo es en algún sentido menos simétrico que el disco de Poincaré, pero es precisamente esa falta de simetría que permite ver más cosas (por ejemplo, para demostrar que las geodésicas del disco son las que dijimos, es más fácil transportar el problema al semi-plano superior). Otra ventaja relativa del semi-plano H es la forma particularmente agradable de su grupo de isometrías: las isometrías de una variedad riemanniana son las transformaciones que preservan la métrica y, en el caso de H, se puede ver como el grupo de matrices 2x2 con coeficientes reales y de determinante 1. Tiene un sub-grupo notable, conformado por las matrices 2x2 con coeficientes enteros y determinante 1, llamado el *grupo modular*. Es a través de la acción de ese grupo sobre el semi-plano superior que se hace la conexión entre la geometría hiperbólica y la teoría de números. A cada elemento w de H se le asocia el conjunto R_w conformado por los vectores del plano de la forma pw+q, con p y q enteros. Tal conjunto R_w se llama un *retículo*. Si identificamos dos números complejos z y z' cada vez que difieren por un elemento de R_w, el espacio que obtenemos al hacer esa identificación se llama *toro* y se ve como en la Figura 5.

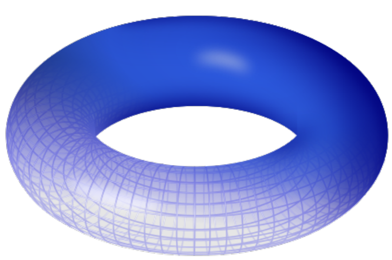

Figura 5 - Un toro de revolución

Resulta que esos toros admiten una estructura algebraica: son curvas elípticas reales, es decir que se obtienen resolviendo ecuaciones de la forma $y^2=x^3+ax+b$ con a y b reales. Sin entrar en esas consideraciones que nos llevarían algo lejos de nuestro tema, es evidente por la manera como construimos un toro a partir del retículo R_w, que esos toros heredan una estructura analítica compleja (es decir que en ellos podemos definir, al igual que en los números complejos clásicos, una noción de función holomorfa, puesto que tal condición es de naturaleza *local*). Entonces, para un matemático, la pregunta natural es: ¿podemos clasificar esos toros (o de forma equivalente, los retículos de la forma R_w) y qué tipo de estructura tiene el espacio de todos ellos? Aquí vuelve a aparecer el grupo modular: dos retículos R_w y $R_{w'}$ son equivalentes si, y solamente si, existe un elemento g en el grupo modular que los conecta, es decir una matriz g tal que g·w=w'. Entonces el espacio de todos los retículos R_w es el espacio que se obtiene a partir de H cuando identificamos dos puntos w y w' cada vez que existe un elemento g en el grupo modular tal que g·w=w' (en tal caso se dice que w y w' están en una misma *órbita* de la acción del grupo modular en H). Para visualizar ese espacio, es suficiente encontrar un *dominio fundamental* para la acción del grupo modular en H, es decir un subconjunto D de H que contiene al menos un punto de cada órbita y que contiene dos tales si, y solamente si, esos puntos están en el borde de D. Tal dominio fundamental se puede representar como en la Figura 6 (la parte gris es el dominio fundamental).

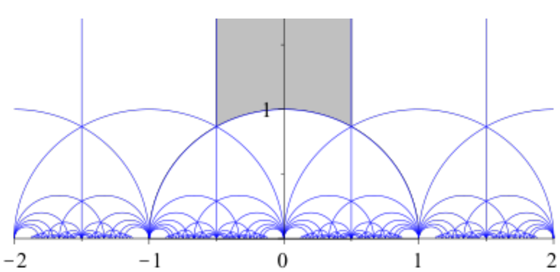

Figura 6 - El espacio de módulos de curvas elípticas

El espacio de retículos R_w con w en H se obtiene entonces al identificar los puntos del borde de D que están en una misma órbita de la acción del grupo modular. Ese espacio se llama el espacio de módulos de curvas elípticas y, por construcción, admite una estructura analítica compleja. Resulta que también admite una estructura algebraica pero, para mostrarlo, ¡todavía faltan muchos pasos!

Así termina esta breve introducción al plano hipérbolico, un objeto dotado de una estructura muy rica que, como lo hemos visto, está en la encrucijada de la geometría riemanniana y de la teoría de números. No hay duda que siga fascinando e inspirando a los seguidores de Euclides, Gauss, Riemann y Poincaré.

Créditos imágenes

-Figura 1: Dominio público, *https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=146575*
-*Figura 2:* Dominio público, *https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=66385*
-Figura 3: Por Trevorgoodchild https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=36685779
-Figura 4: Por Eugène Pirou (1841–1909), dominio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3960511
-Figura 5: Por Leonid_2 - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8643414
-Figura 6: Por Alexander Hulpke - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=59963451

Para profundizar

[1] Etienne Ghys, *Poincaré et son disque,* http://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/disque-poincare.pdf
[2] Jean-Pierre Serre, *A course in arithmetic*, GTM 7, Springer-Verlag (1973).