Vortrag 3: Gebrochen lineare Transformationen und das Doppelverhältnis

Wiederholung: $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ projektiv, falls es eine injektive lineare Abbildung $F: V \to W$ gibt, sodass
$$f(K\cdot v) = K\cdot F(v) \quad \forall v \neq 0$$

Notation: $f = \mathbb{P}(F)$,

f Projektivität $\Leftrightarrow$ F bijektiv

Sei $f: \mathbb{P}_n(K) \to \mathbb{P}_n(K)$ Projektivität

$\Rightarrow$ $\exists$ Isomorphismus $F: K^{n+1} \to K^{n+1}$ s.d. $f = \mathbb{P}(F)$

$\Rightarrow$ $\exists A \in GL(n+1, K)$: $F: K^{n+1} \to K^{n+1}$, $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sei $p = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K)$:

$$f((x_0 : \ldots : x_n)) = K \cdot \underbrace{F((x_0, \ldots, x_n))}_{Ax} = K \cdot \begin{pmatrix} a_{00}x_0 + \ldots + a_{0n}x_n \\ \vdots \\ a_{n0}x_n + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= ((a_{00}x_0 + \ldots + a_{0n}x_n) : \ldots : (a_{n0}x_0 + \ldots + a_{nn}x_n))$$

$\rightarrow$ Darstellung der Projektivität mit Matrix A.

Affiner Standpunkt: K^n eingebettet in $\mathbb{P}_n(K)$ und wird ergänzt durch $H = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) : x_0 = 0\}$

Für $p = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \setminus H$:

$$\underbrace{(x_0 : \ldots : x_n)}_{\in \mathbb{P}_n(K)} \longleftrightarrow \underbrace{\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)}_{\in K^n}$$

Für $f(p) = (y_0 : \ldots : y_n) \in \mathbb{P}_n(K)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_1}{y_0} &= \frac{a_{10}x_0 + \ldots + a_{1n}x_n}{a_{00}x_0 + \ldots + a_{0n}x_n} \\ &\vdots \\ \frac{y_n}{y_0} &= \frac{a_{n0}x_0 + \ldots + a_{nn}x_n}{a_{00}x_0 + \ldots + a_{0n}x_n} \end{aligned}\right\}$$ wohldefiniert für $y_0 \neq 0$

$\Rightarrow$ gebrochen lineare Transformation des K^n

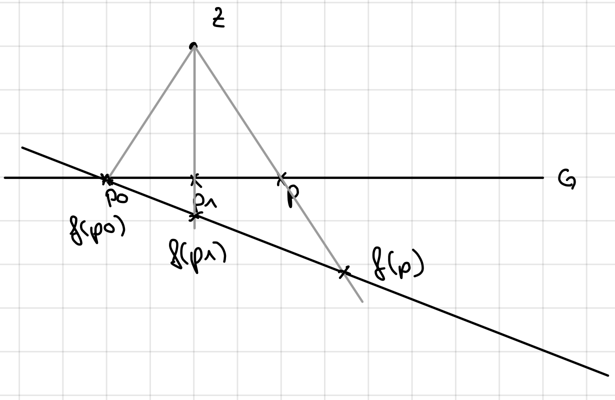
$f|_{K^n}$ ist Affinität des K^n $\Leftrightarrow$ $f(H) = H$ $\Leftrightarrow$?

Es gilt: $f^{-1}(H) = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) : a_{00}x_0 + \underbrace{a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n}_{=0} = 0\}$

Dann: $f(H) = H \Leftrightarrow a_{01} = \ldots = a_{0n} = 0$

Wiederholung: Das Teilverhältnis $TV(p_0, p_1, p)$ ist invariant unter affinen Abbildungen.

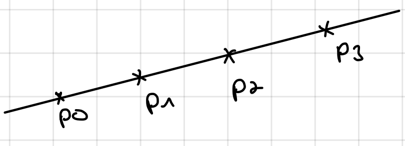
Überlegung:



$TV(p_0, p_1, p) = 2$

$TV(f(p_0), f(p_1), f(p)) > 2$

Stattdessen: Doppelverhältnis



$$DV(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{\overline{p_0 p_2}}{\overline{p_1 p_2}} : \frac{\overline{p_0 p}}{\overline{p_1 p}}$$

Definition (Doppelverhältnis): $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}(V)$ kollinear mit Gerade G, p_0, p_1, p_2 pw. verschieden.

$\Rightarrow$ (p_0, p_1, p_2) projektive Basis von G

⌜ Überlegung:

$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
Geraden ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 nicht parallel	p_0, p_1, p_2
Ebene, ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 enthalten	G
	(p_0, p_1, p_2) proj. Basis

⌞

$\Rightarrow$ $\exists\, \kappa : \mathbb{P}_1(K) \to \mathbb{P}(V)$: $\kappa(1:0) = p_0$, $\kappa(0:1) = p_1$, $\kappa(1:1) = p_2$

$\Rightarrow$ p_3 hat die homogenen Koordinaten $\Rightarrow$ $(\lambda_3 : \mu_3) = \kappa^{-1}(p) \in \mathbb{P}_1(K)$

$\Rightarrow$ $DV(p_0, p_1, p_2, p_3) = \lambda_3 : \mu_3$

Satz: Das Doppelverhältnis ist invariant unter Projektivitäten.

Beweis: • Seien $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}(V)$ kollinear mit gemeinsamer Gerade $G \subset \mathbb{P}(V)$, p_0, p_1, p_2 p.w. verschieden

$\Rightarrow$ $\exists\, \kappa : \mathbb{P}_1(K) \to \mathbb{P}(V)$, $\kappa(1:0) = p_0$, $\kappa(0:1) = p_1$, $\kappa(1:1) = p_2$

• Sei $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ Projektivitäten $\quad G' = f(G) \subset \mathbb{P}(W)$

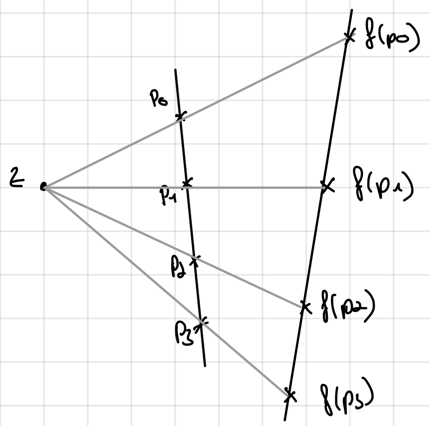
$\Rightarrow$ $(f(p_0), f(p_1), f(p_2))$ projektive Basis von G'

$\Rightarrow$ $\exists\, \kappa' : \mathbb{P}_1(K) \to \mathbb{P}(W)$: $\kappa'(1:0) = f(p_0)$, $\kappa'(0:1) = f(p_1)$, $\kappa'(1:1) = f(p_2)$

Mit $\kappa' = f|_G \circ \kappa$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_1(K) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\kappa'"'] & G \arrow[d, "f|_G"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $DV(p_0, p_1, p_2, p_3) = \kappa^{-1}(p_3) = \kappa'^{-1}(f(p_3)) = DV(f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p_3))$ $\square$



$$DV(f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p_3)) = \frac{\overline{f(p_0)f(p_2)}}{\overline{f(p_1)f(p_2)}} : \frac{\overline{f(p_0)f(p_3)}}{\overline{f(p_1)f(p_3)}}$$

$n=1$:

Lemma: Seien $p_k = (\lambda_k : \mu_k) \in \mathbb{P}_1(K)$, $k = 0, \dots, 3$, s.d. p_0, p_1, p_2 p.w. verschieden und kollinear.

Dann: $$DV(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{pmatrix}} : \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{pmatrix}}$$

Beweis: $\exists\ \varkappa$: $\quad \varkappa(1:0) = p_0 = (\lambda_0 : \mu_0) \quad \varkappa(0:1) = p_1 = (\lambda_1 : \mu_1)$

Betrachte Matrix $$A = \begin{pmatrix} \varsigma \cdot \lambda_0 & \varsigma' \lambda_1 \\ \varsigma \cdot \mu_0 & \varsigma' \cdot \mu_1 \end{pmatrix}, \varsigma, \varsigma' \in K^*$$

Außerdem $\varkappa(1:1) = (\lambda_2 : \mu_2)$
$$\varsigma \lambda_0 + \varsigma' \lambda_1 = \varsigma'' \lambda_2$$
$$\varsigma \cdot \mu_0 + \varsigma' \mu_1 = \varsigma'' \cdot \mu_2 \qquad \varsigma'' \in K^*$$

Wähle $$\varsigma'' = \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{pmatrix} = \frac{\det(A)}{\varsigma\varsigma'}$$

LGS $\Rightarrow$ lösen $$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} & \lambda_1 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \\ \mu_0 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} & \mu_1 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} & -\lambda_1 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \\ -\mu_0 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} & \lambda_0 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Nach Definition: $\quad (x : y) = \varkappa^{-1}(p_3) = \varkappa^{-1}(\lambda_3 : \mu_3)$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varsigma''' \cdot A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \varsigma''' \in K^*$$

Wähle $\varsigma''' = -\det(A)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\cancel{\det(A)} \frac{1}{\cancel{\det(A)}} \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} & -\lambda_1 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \\ -\mu_0 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} & \lambda_0 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} (\mu_1 \lambda_3 - \lambda_1 \cdot \mu_3) \\ \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} (\lambda_0 \mu_3 - \mu_0 \lambda_3) \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_3 \\ \mu_0 & \mu_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow DV(p_0,p_1,p_2,p_3) = x : y = \left(\det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix}\right) : \left(\det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{pmatrix}} : \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{pmatrix}}$$

$\square$

Verallgemeinerung: $p_k = (x_0^{(k)} : \ldots : x_n^{(k)})$, $k = 0, \ldots, 3$ in $\mathbb{P}_n(K)$ kollinear, p_0, p_1, p_2 p.w. verschieden.

Sind $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ zwei verschiedene Indizes s.d. $(x_i^{(0)}, x_j^{(0)}), (x_i^{(1)}, x_j^{(1)}), (x_i^{(2)}, x_j^{(2)}) \in \mathbb{P}_1(K)$ def. und p.w. verschieden

$$\Rightarrow DV(p_0,p_1,p_2,p_3) = \frac{\det\begin{pmatrix} x_i^{(3)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(3)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x_i^{(3)} & x_i^{(0)} \\ x_j^{(3)} & x_j^{(0)} \end{pmatrix}} : \frac{\det\begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(0)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(0)} \end{pmatrix}}$$

$\square$