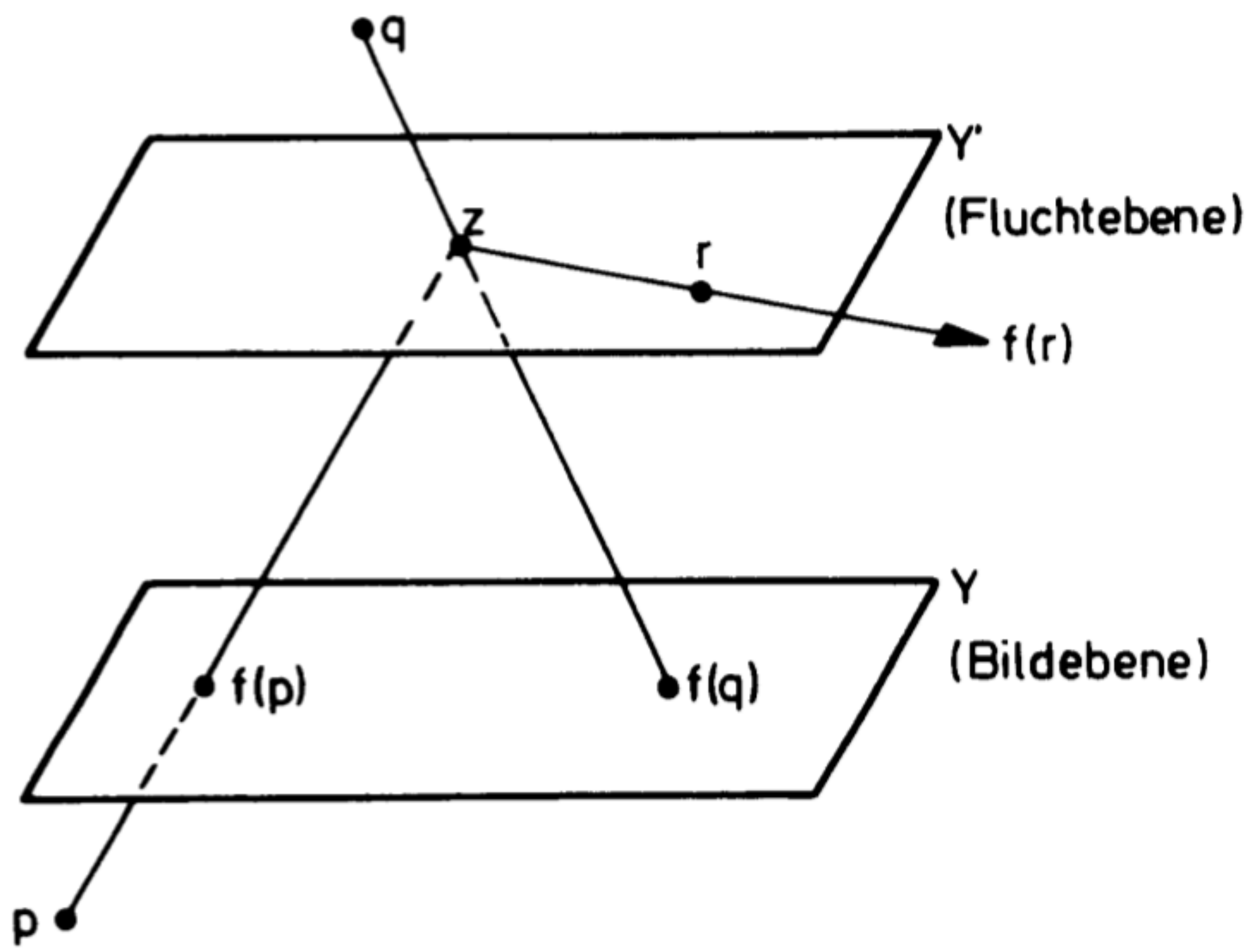
Projektive Räume und Projektive Abbildungen

Themenbereich Projektive Geometrie

Solveig Harder, 22.5.24

Inhalt

- Projektiver Raum, Projektive Koordinaten
- Vergleich zu Affinen Räumen
- Abschluss eines affinen Raums
- Projektive Unabhängigkeit
- Anwendungsbeispiel Dobble


q
Y'
(Fluchtebene)
z
r
f(r)
Y
(Bildebene)
f(p)
f(q)
p

Unendlich ferne Punkte

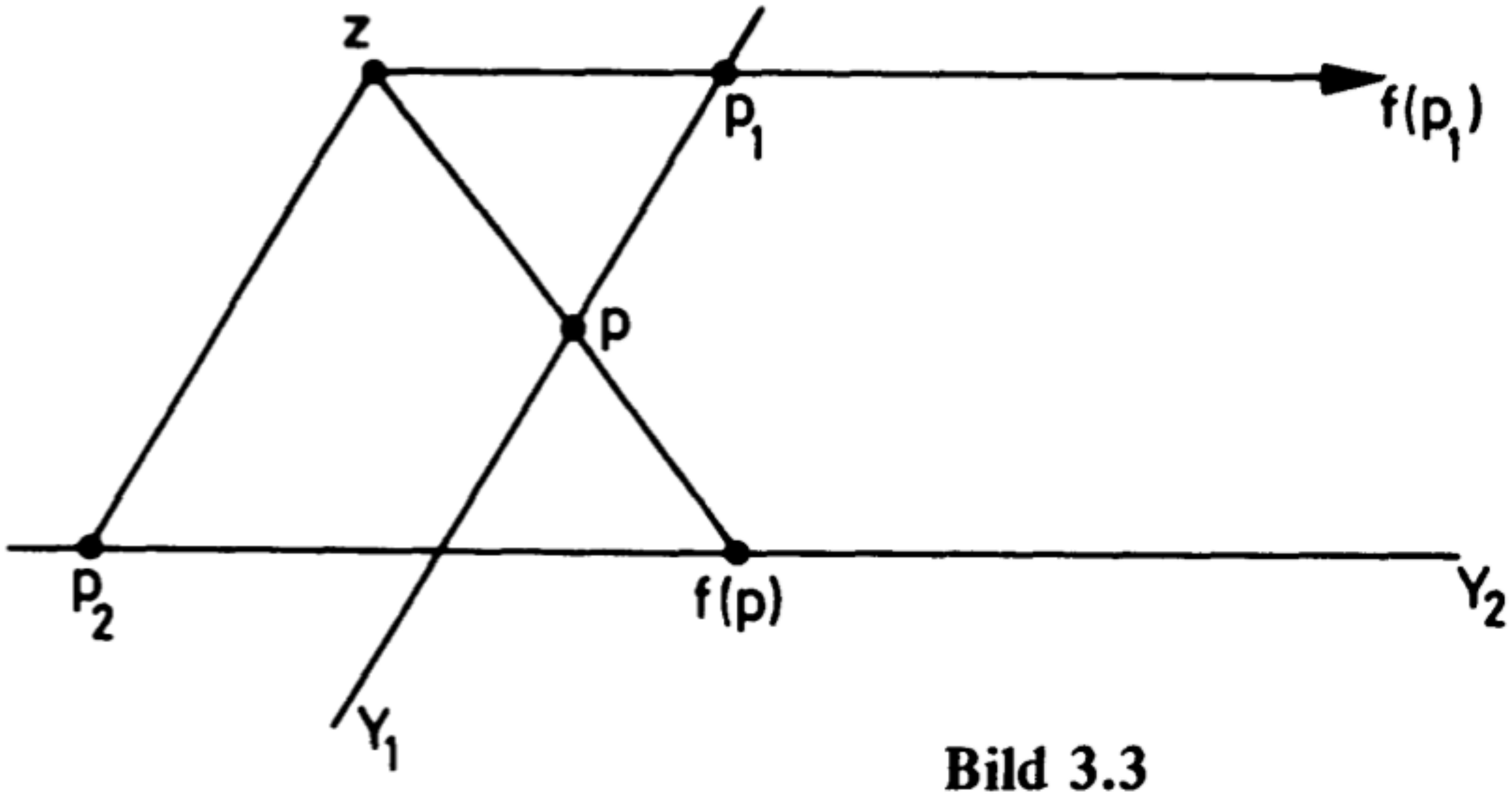


Bild 3.3

Der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Mit $\mathbb{P}(V)$ bezeichnen wir die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von V.

Das ist die Menge der Ursprungsgeraden.

Projektive Abbildungen

Definition: Eine Abbildung $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ heißt *projektiv*, wenn es eine injektive lineare Abbildung $F : V \to W$ gibt, mit $f(K \cdot v) = K \cdot F(w)$ für jedes vom Nullvektor verschiedene $v \in V$. Man schreibt dafür kurz $f = \mathbb{P}(F)$.

Eine bijektive projektlive Abbildung heißt *Projektivität*.

Projektive Abbildungen

Für zwei injective lineare Abbildungen $F, F' : V \to W$ gilt $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow$ es gibt ein $\lambda \in K$ mit $F' = \lambda \cdot F$

Der projektive Raum
Beispiel 1

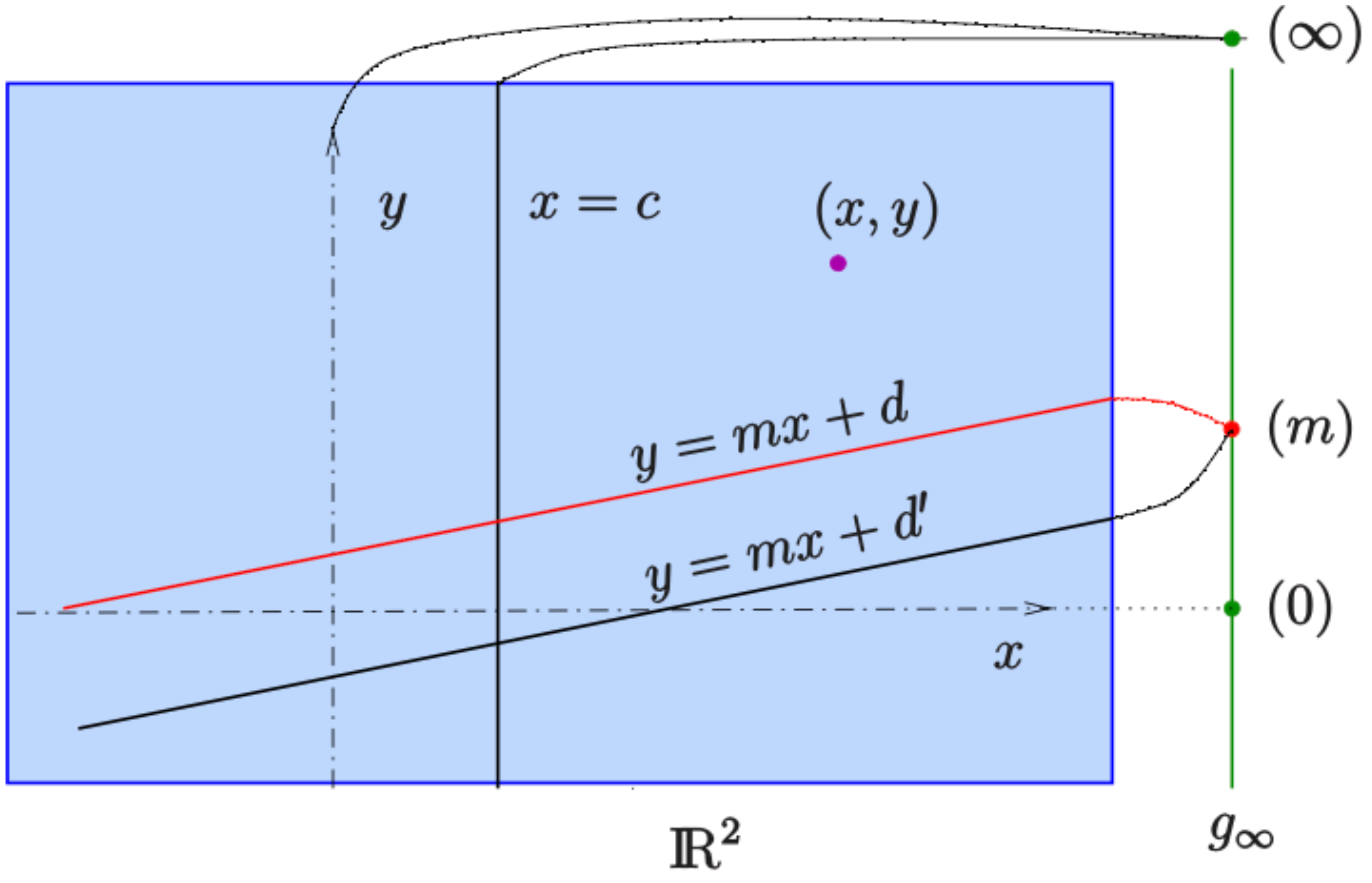
Für haben wir eine kanonische Einbettung:

$$\mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^m(K), \quad (X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (X_0 : \ldots : X_n : 0 : \ldots : 0)$$

Homogene Koordinaten

- Ist $V = K^{n+1}$ und $v = (x_0, \ldots x_n)$ ungleich dem Nullvektor so setzen wir $(x_0 : \ldots : x_n) = K \cdot (x_0, \ldots, x_n)$

Inhomogene Koordinaten



- Projektive Gerade für dim Z = 1
- Projektive Ebene für dim Z = 2
- Projektive Hyperebene für dim Z = dim $\mathbb{P}(V) - 1$

Zusammenhang zu affinen Räumen

Affine Räume

- Spezialfall von projektiven Räumen
- Weist bestimmte Eigenschaften von Vektorräumen auf, aber ohne festen Ursprung oder Maßstab
- Erlauben Definition von Punkten, Geraden und Ebenen, wobei Parallelität und Verhältnisse unabhängig vom Koordinatensystem sind
- Affine Abbildungen bewahren Verhältnisse von Punkten auf Geraden

Zusammenhang zu affinen Räumen

Projektive Räume

- Projektive Räume Erweiterung affiner Räume
- Entsteht durch Erweiterung mit „unendlichen Punkten“
- Alle Geraden schneiden sich
- Einheitliche Darstellung von Punkten, die im affinen Raum unendlich weit entfernt sind

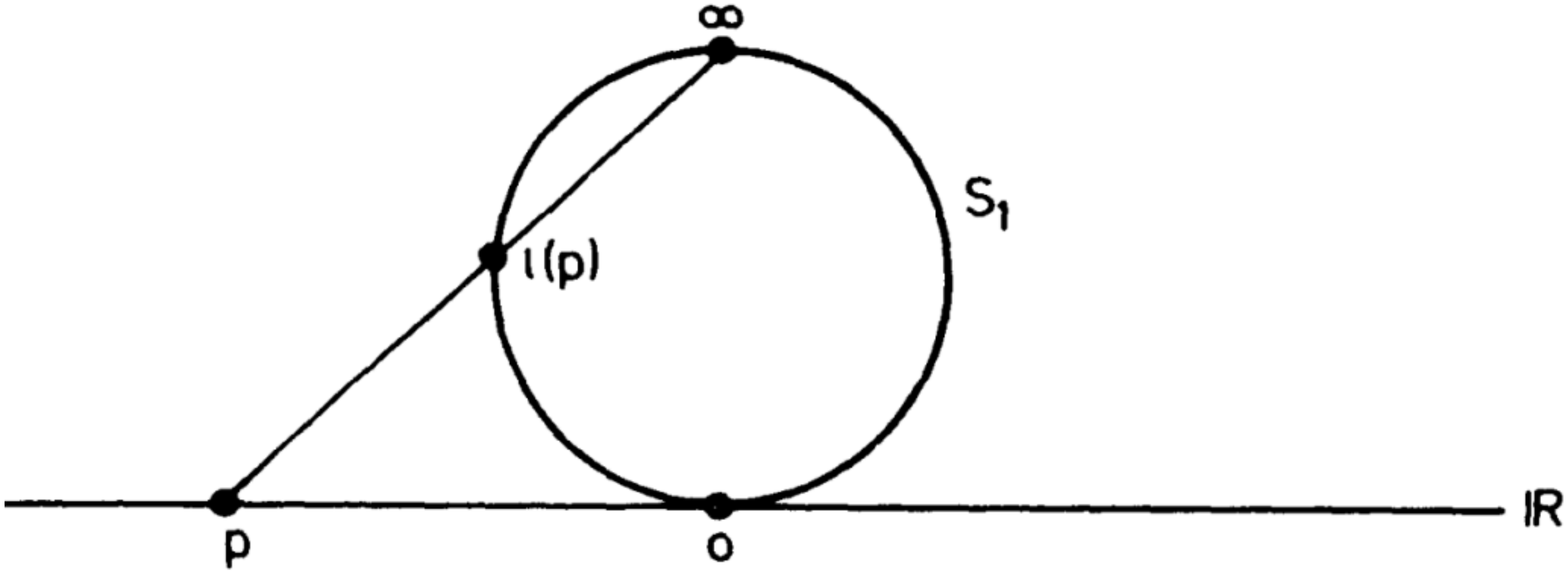
2 Hyperebene

- Wollen nun beweisen: man kann mit einer beliebigen Hyperebene des Projektiven Raums durch ihr Entfernen den affinen Raum erhalten
- Wie kann man Unterräume und Abbildungen ausdehnen oder einschränken?

Projektiver Abschluss im affinen Raum $\mathbb{R}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\iota: \mathbb{R} \to S_1$



2 Satz

Sei V ein K Vektorraum und $H \subset \mathbb{P}(K)$ eine Hyperebene. Dann kann man das Komplement $X := \mathbb{P}(V) \backslash H$ so zu einem affinen Raum $(X, T(X), \tau)$ machen, dass folgendes gilt:

A) Es gibt eine kanonische bijektive Abbildung $H \to X_\infty$

2 Satz

Sei V ein K Vektorraum und $H \subset \mathbb{P}(V)$ eine Hyperebene. Dann kann man das Komplement $X := \mathbb{P}(V) \backslash H$ so zu einem affinen Raum $(X, T(X), \tau)$ machen, dass folgendes gilt:

B.1) Für jeden projektiven Unterraum $Z \subset \mathbb{P}(V)$ mit $Z \not\subset H$ ist $Z \cap X$ ein affiner Unterraum von X mit $dim(Z \cap X) = dim\ Z$ und $dim(Z \cap H) = dim\ Z - 1$

2 Satz

Sei V ein K Vektorraum und $H \subset \mathbb{P}(K)$ eine Hyperebene. Dann kann man das Komplement $X := \mathbb{P}(V) \backslash H$ so zu einem affinen Raum $(X, T(X), \tau)$ machen, dass folgendes gilt:

B.2) Die durch $Z \mapsto Z \cap X$definierte Abbildung von der Menge der nicht in H enthaltenen projektiven Unterräume $Z \subset \mathbb{P}(V)$ in die Menge der nichtleeren affinen Unterräume von X ist bijektiv.

2 Satz

Sei V ein K Vektorraum und $H \subset \mathbb{P}(K)$ eine Hyperebene. Dann kann man das Komplement $X := \mathbb{P}(V) \backslash H$ so zu einem affinen Raum $(X, T(X), \tau)$ machen, dass folgendes gilt:

B.3) Insbesondere kann man jeden affinen Unterraum $Y \subset X$ zu einem projektiven Unterraum $\overline{Y} \subset \mathbb{P}(V)$ mit $\overline{Y} \cap X = Y$ abschließen

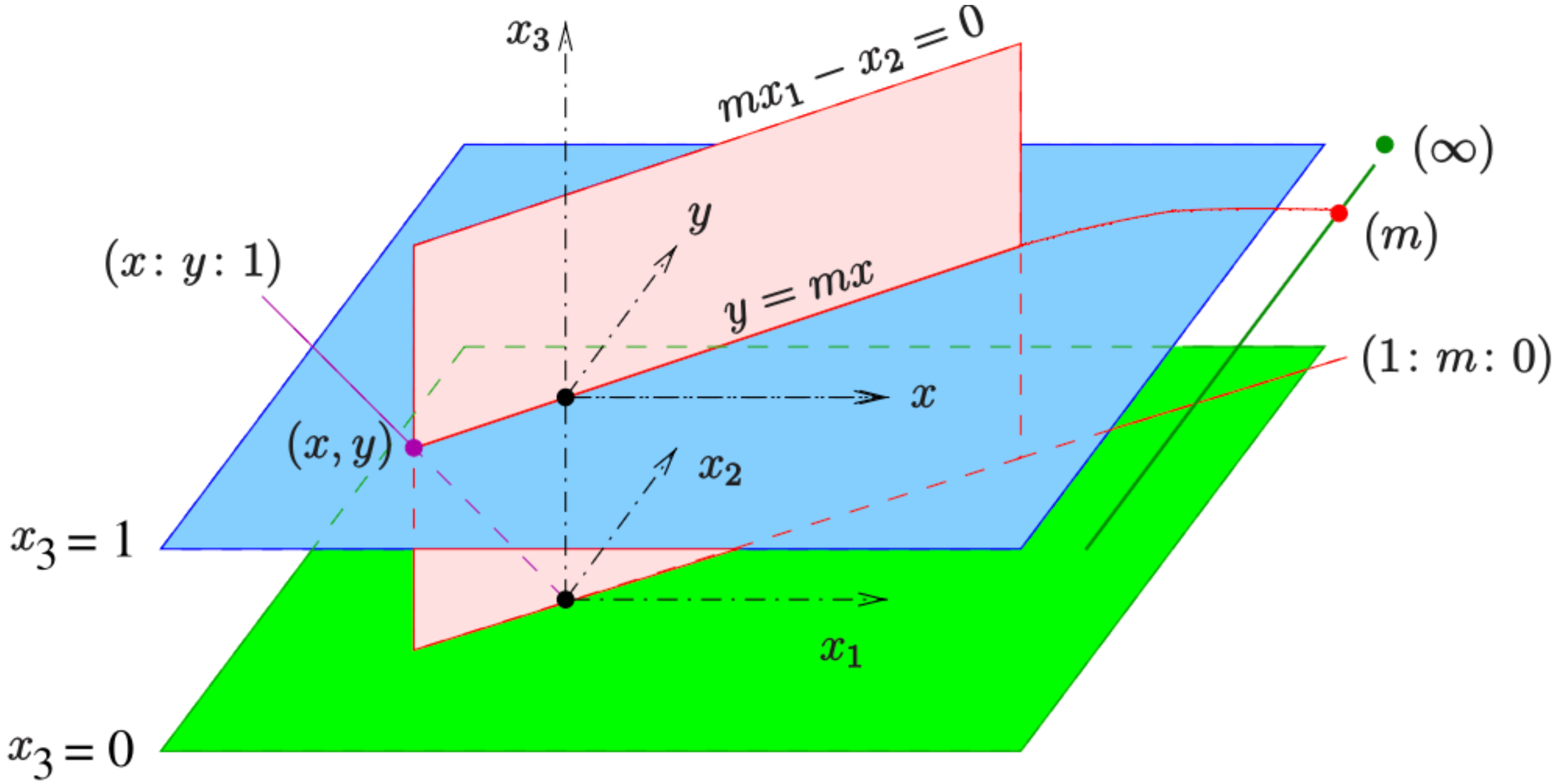
2 Satz

Sei V ein K Vektorraum und $H \subset \mathbb{P}(K)$ eine Hyperebene. Dann kann man das Komplement $X := \mathbb{P}(V) \backslash H$ so zu einem affinen Raum $(X, T(X), \tau)$ machen, dass folgendes gilt:

C) Für jede Projektivität $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ mit $f(H) = H$

von $f \,|\, X : X \to X$ eine Affinität und die durch $f \mapsto f \,|\, X$ definierte Abbildung von der Menge der Projektivitäten $\mathbb{P}(V)$, die H in sich überführen in die Menge der Affinitäten von X ist bijektiv.

Insbesondere kann man jede Affinität g von X zu einer Projektivität $\overline{g}$ von $\mathbb{P}(X)$ mit $\overline{g} \,|\, X = g$ und $\overline{g}(H) = H$ fortsetzen



x_3
$mx_1 - x_2 = 0$
(∞)
y
(m)
$(x\colon y\colon 1)$
$y = mx$
$(1\colon m\colon 0)$
x
(x, y)
x_2
$x_3 = 1$
x_1
$x_3 = 0$

3) Satz

Zu jedem affinen Raum $(X, T(X), \tau)$ gibt es einen projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ mit der Hyperebene H und der Affinität $h : X \to \mathbb{P}(V) \backslash H$ wobei $\mathbb{P}(V) \backslash H$ zu einem affinrn Raum gemacht ist

4 Eindeutigkeit

- Wissen aus der linearen Algebra, dass eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen eindeutig, wenn man die Bilder der Basisvektoren vorschreibt
- Dies ermöglicht Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen
- Dies wollen wir auch in der projektiven Geometrie nutzen, und müssen untersuchen, wie weit eine projektlive Abbildung durch die Vorgabe der Bilder endlich vieler Punkte festgelegt ist

4 Definition

Ein $(r+1)-tupel\ (p_0,\ldots,p_r)$ von Punkten eines projektiven Raums $\mathbb{P}(V)$ heißt projektiv unabhängig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

i) Es gibt linear unabhängige Vektoren $(v_0,\ldots,v_r) \in V$ mit $p_i = K \cdot v_i$ für $i = 0,\ldots,r$.

ii) Jedes $(r+1)-tupel\ (v_0,\ldots,v_r)$ von Vektoren aus V mit $p_i = K \cdot v_i$ für $i = 0,\ldots,r$ ist linear unabhängig.

iii) $dim(p_0 \vee \ldots \vee p_r)$

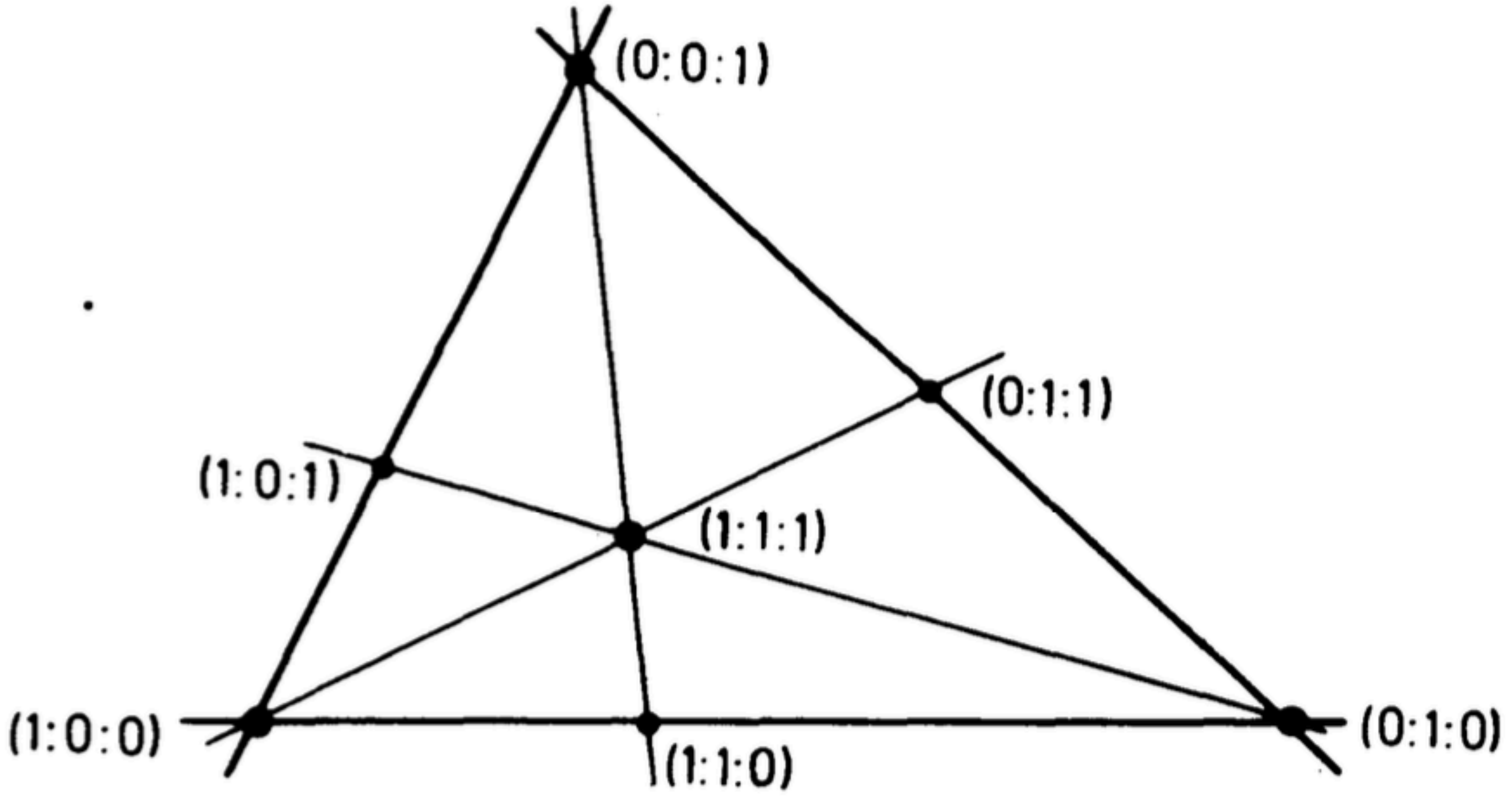
4 Projektive Basis

- Ein $(n+2)-tupel\ (p_0, \ldots, p_{n+1})$ von Punkten aus $\mathbb{P}(V)$ heißt Projektile Basis, wenn je $n+1$ Punkte davon projektiv unabhängig sind.
- Dabei ist $n = dim\ \mathbb{P}(V)$

4 Beispiel

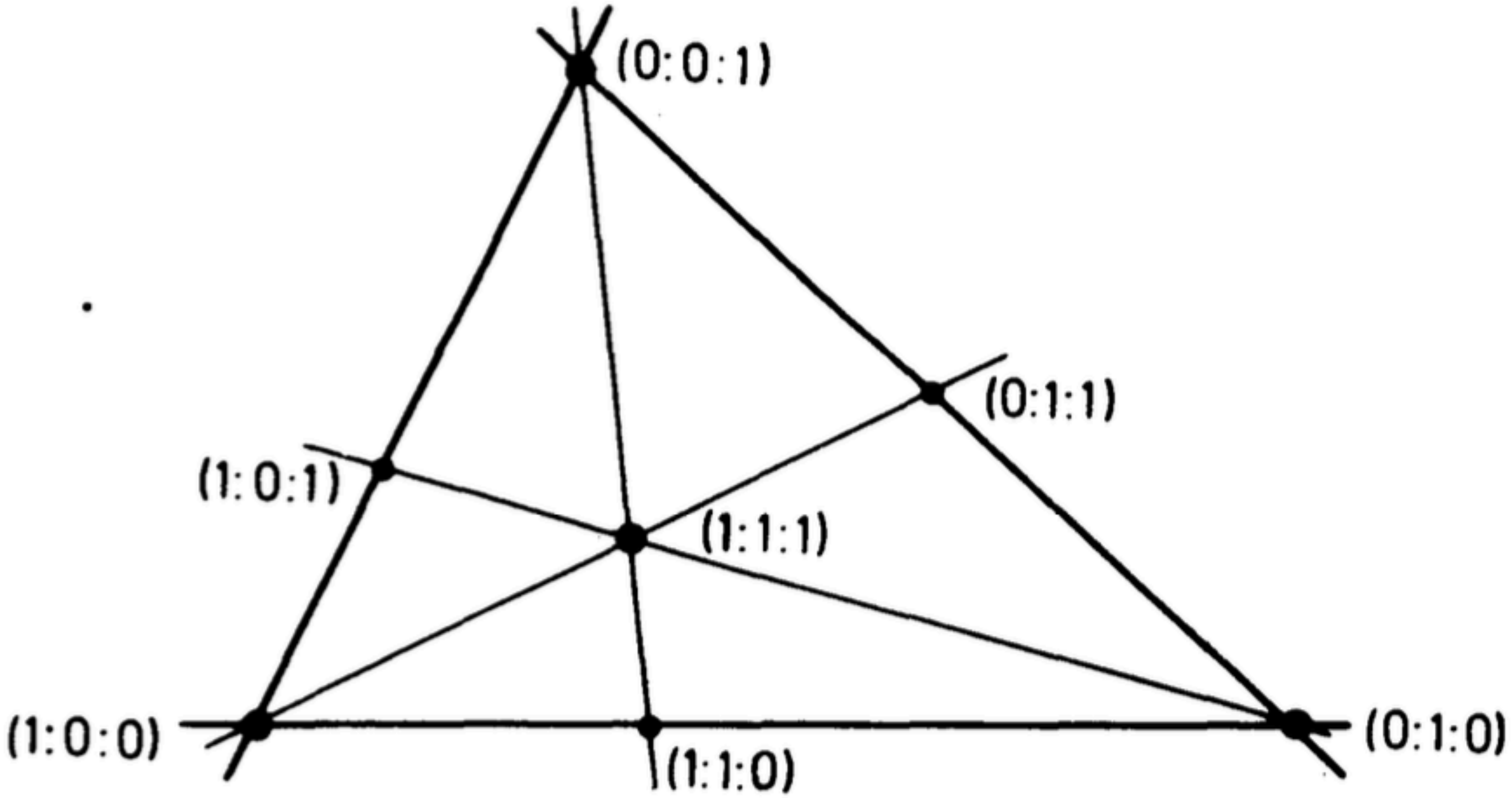
In $\mathbb{P}_n(K)$ ist eine kanonische projektlive Basis gegeben durch

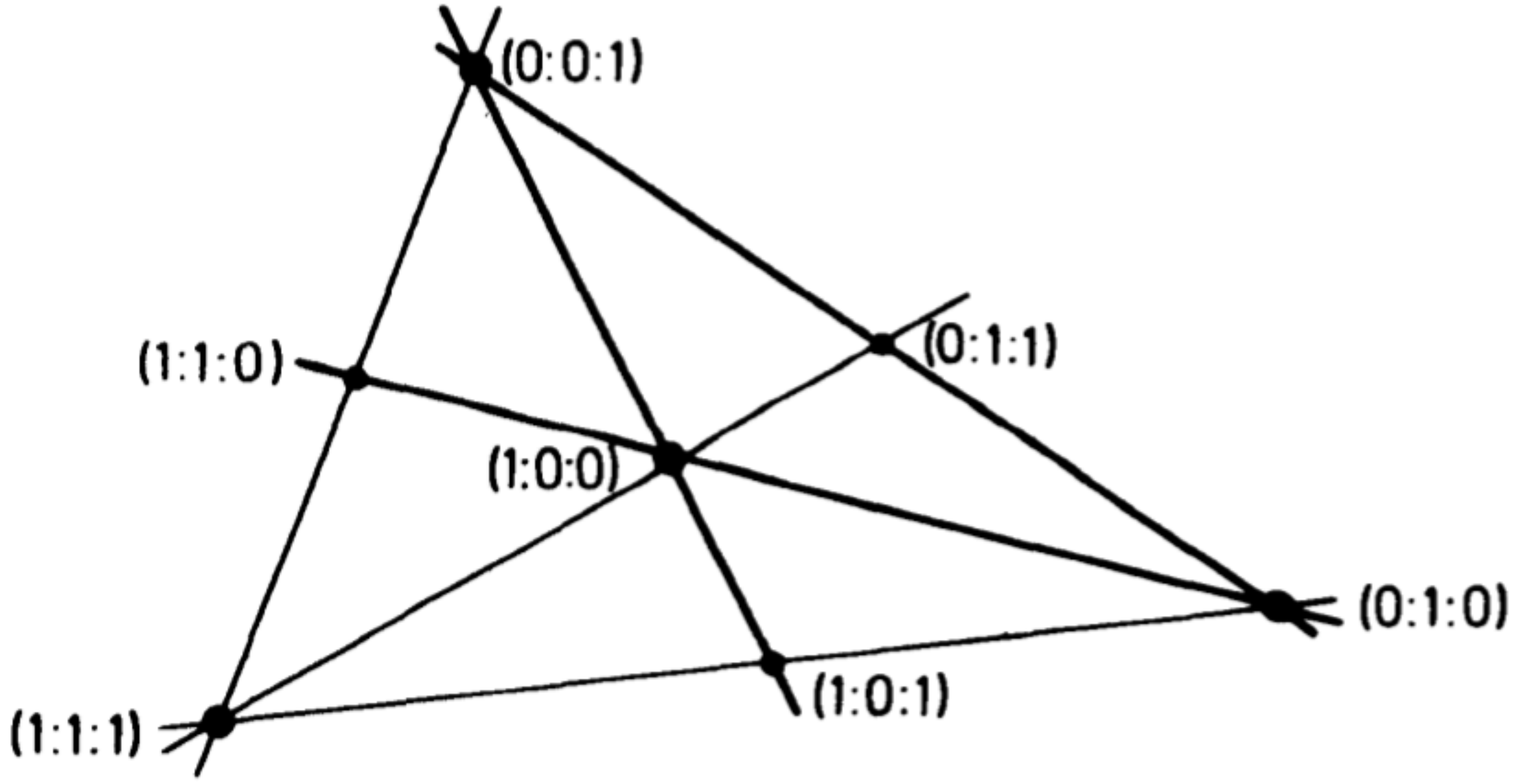
$$
\begin{aligned}
P_0 &: (1 : 0 : \ldots : 0 : 0) \\
P_1 &: (0 : 1 : 0 : \ldots : 0) \\
P_n &: (0 : 0 : \ldots : 0 : 1) \\
P_{n+1} &: (1 : 1 : \ldots : 1 : 1)
\end{aligned}
$$



4 Vergleich

Beide Darstellungen sind möglich





5 Kanonische Basis

- Die kanonische Basis des projektiven Raumes $\mathbb{P}_n(K)$ erhält man aus der kanonischen Basis $(1,...,0), \ldots, (0,...1)$ des K^{n+1} und dem zusätzlichen Vektor $(1,...,1)$. Eine derartige Basis von V gibt es zu jeder projektiven Basis von $\mathbb{P}(V)$.

5 Lemma

- Ist $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ eine projektlive Basis von $\mathbb{P}(V)$, so gibt es eine Basis $(v_0, \ldots, v_n)$ von V mit

$$\begin{aligned} P_0 &: K'v_0, \\ &\vdots \\ P_n &: K'v_n, \\ P_{n+1} &: K'(v_0 + \ldots + v_n) \end{aligned}$$

-

5 Satz

- Seien $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(W)$ projektlive Räume gleicher Dimension mit projektiven Basen $(p_0, \ldots, p_{n+1})$und $(q_0, \ldots, q_{n+1})$. Dann ergibt sich genau eine Projektivität $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ mit $f(p_i) = q_i$ für $i = 0,...,n + 1$.

6 Projektives Koordinatensystem

In einem projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ der Dimension n über dem Körper K versteht man unter einem (projektiven) Koordinatensystem eine Projektivität
$k : \mathbb{P}_n(K) \to \mathbb{P}(V)$

Ist $p = k(x_o : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}(V)$, so heißt $(x_o : \ldots : x_n)$ ein homogener Koordinatenvektor des Punktes p. Man beachte, dass er nur bis auf einen Skalar $\lambda \neq 0$ eindeutig bestimmt ist (vgl 1.2)

6 Projektives Koordinatensystem

Ist eine projektive Basis $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ von $\mathbb{P}(V)$gegeben, so gibt es dazu nach 2.5. genau ein produktives Koordinaten system $k : \mathbb{P}_n(K) \to \mathbb{P}(V)$

$$\begin{aligned} P_0 &= k(1:0:\ldots:0:0) \\ P_1 &= k(0:1:0:\ldots:0) \\ \ldots P_n &= k(0:0:\ldots:0:1) \\ P_{n+1} &= k(1:1:\ldots:1:1) \end{aligned}$$

Anwendungen und Bedeutung

- Computergrafik
- Computer Vision
- Algebraische Geometrie
- Dobble Spiel