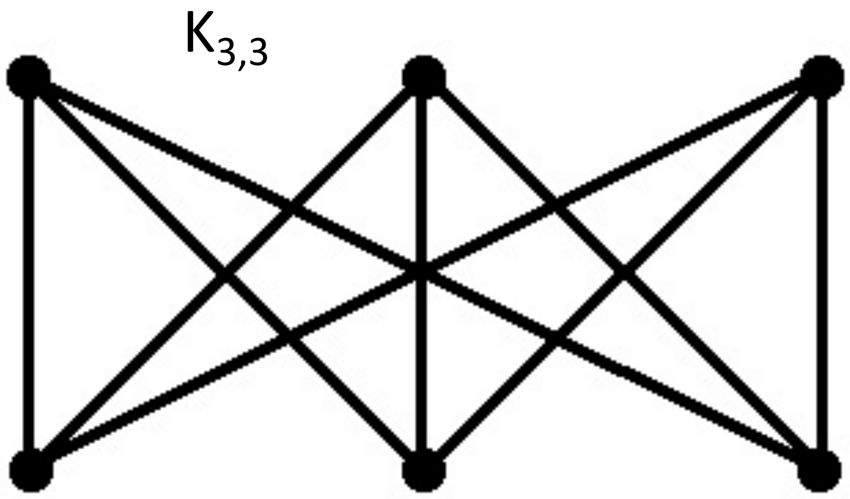
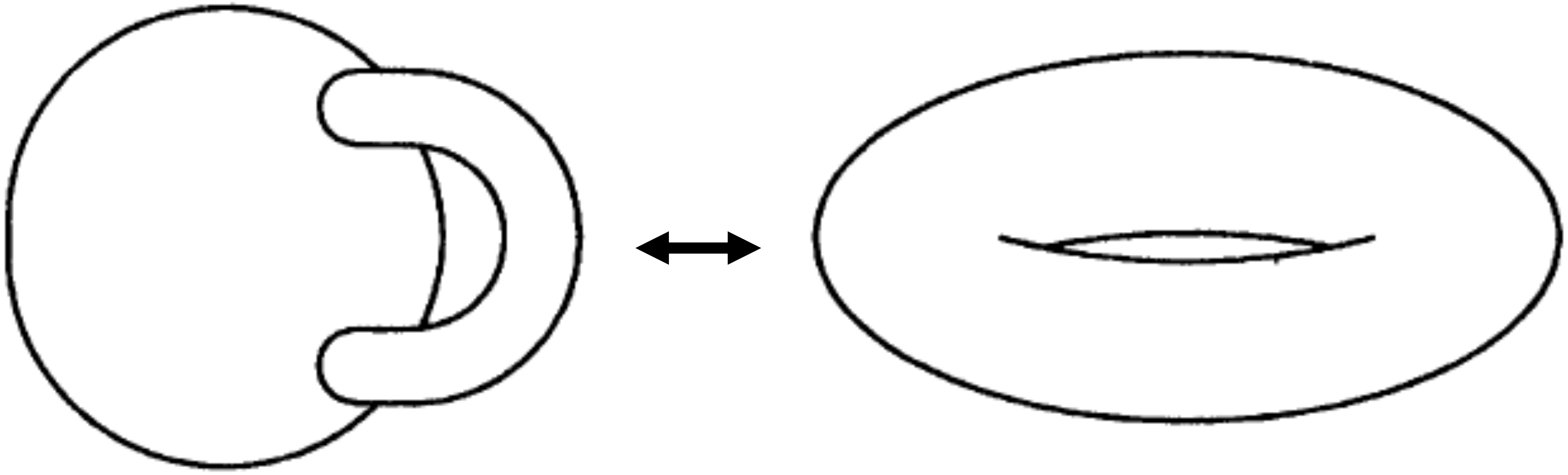
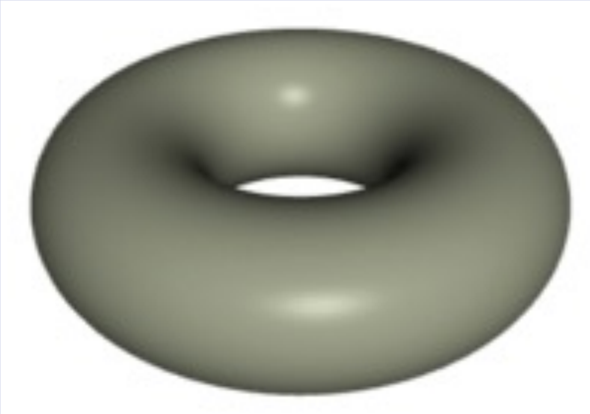
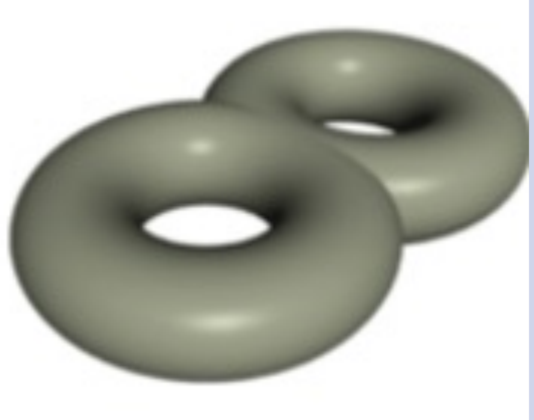
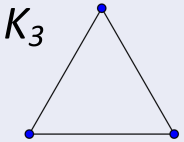
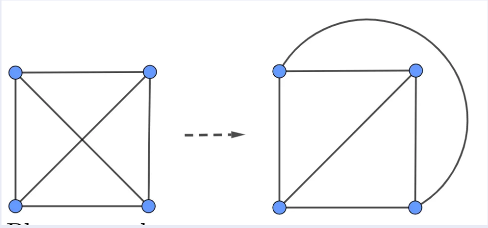
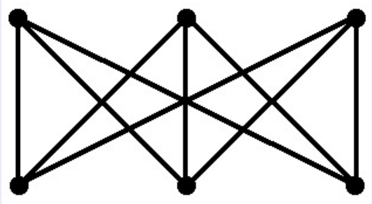
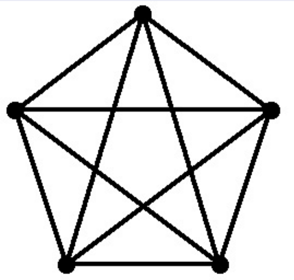
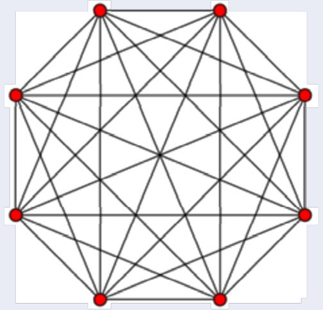
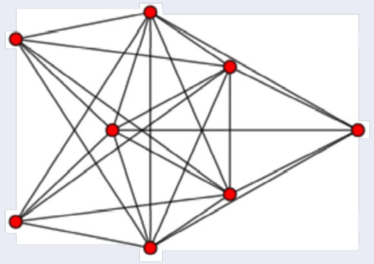
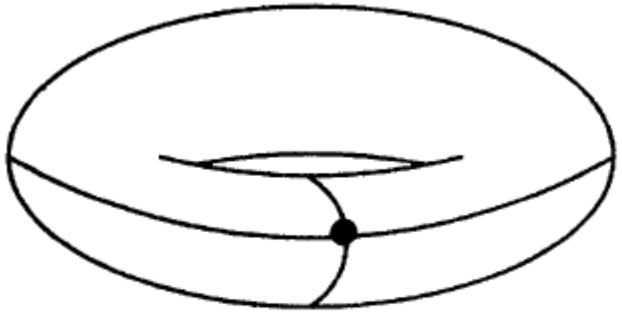
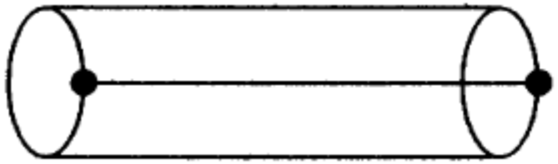
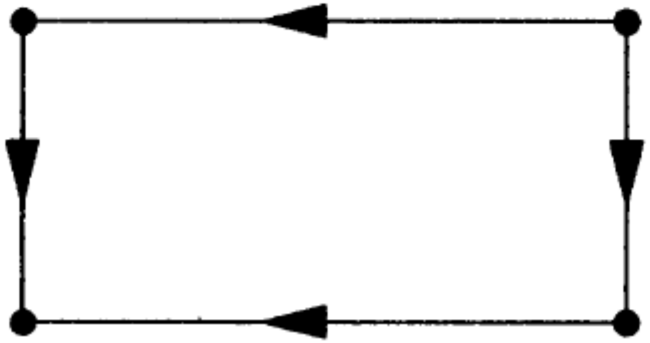
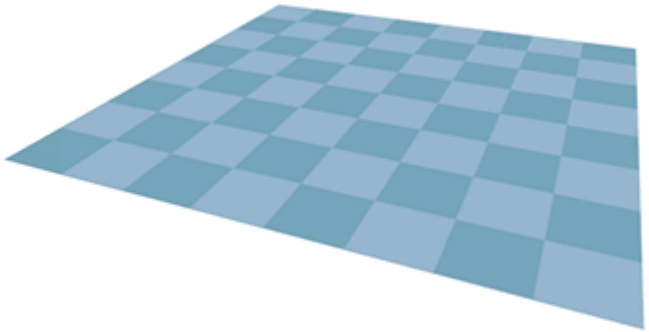

$K_{3,3}$



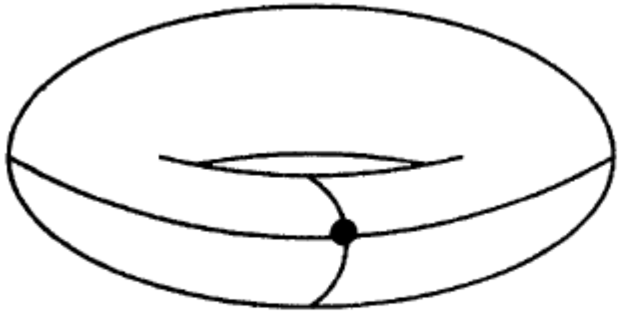
- **Def. 1:** Ein „Henkel“ ist eine Verbindung zwischen zwei Löchern, die in eine Fläche geschnitten werden. Der Torus ist die Fläche, die man durch das Hinzufügen eines Henkels zu einer Kugel erhält.
- **Def. 2:** Das Geschlecht einer Fläche ist die Anzahl der hinzugefügten Henkel, bzw. die Anzahl der Löcher in der Fläche. Schreibe S_γ für eine Fläche vom Geschlecht γ.

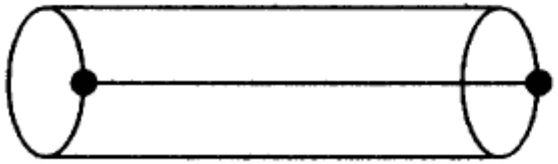
Das Geschlecht eines Graphen G ist das minimale γ, sodass G in S_γ eingebettet wird.

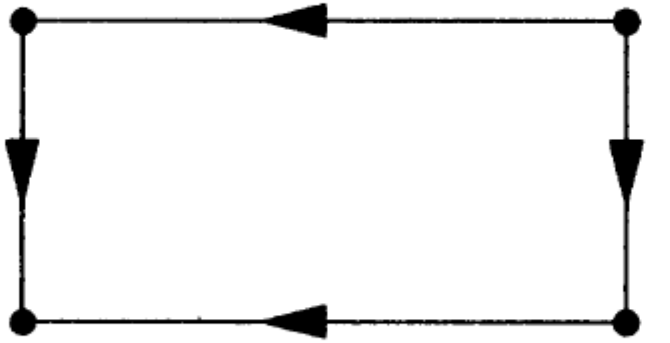
Geschlecht γ=0	Geschlecht γ=1	Geschlecht γ=2
Kugel 	Torus 	Doppeltorus 
Planare Graphen, z. B. K_3  K_4 	Torodiale Graphen, z.B. $K_{3,3}$  K_5 	Doppel-torodiale Graphen, z.B. K_8  $K_{1,1,1,1,1,3}$ 

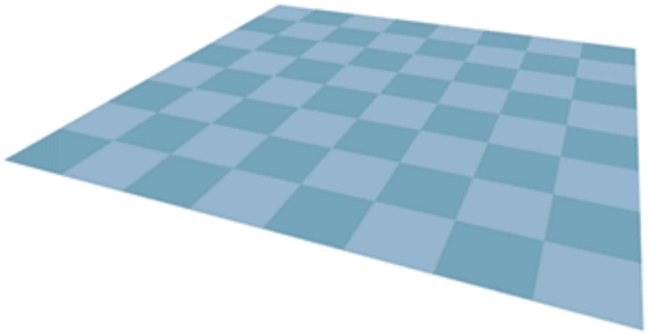
https://apps.hegl.mathi.uni-heidelberg.de/rectangle-to-torus-coloured/

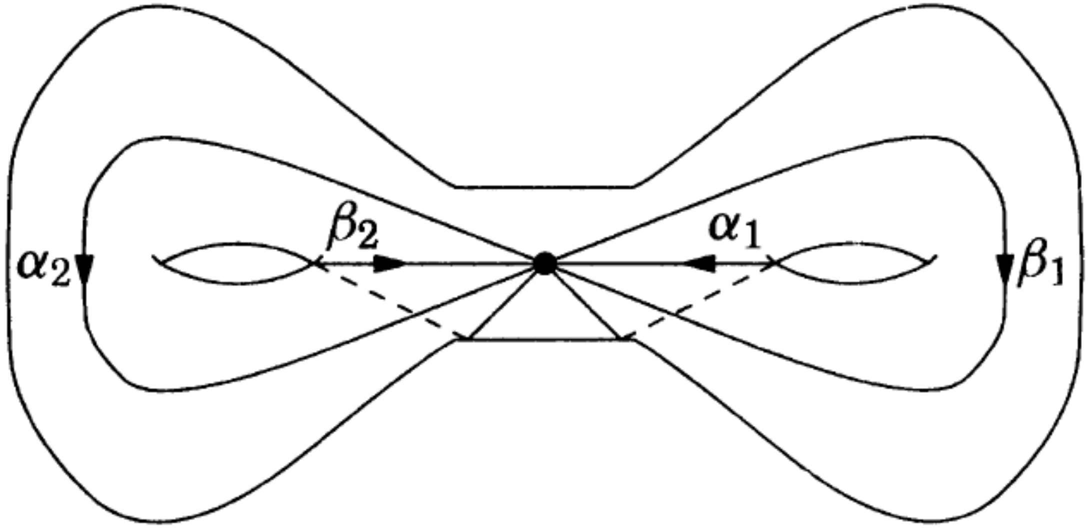


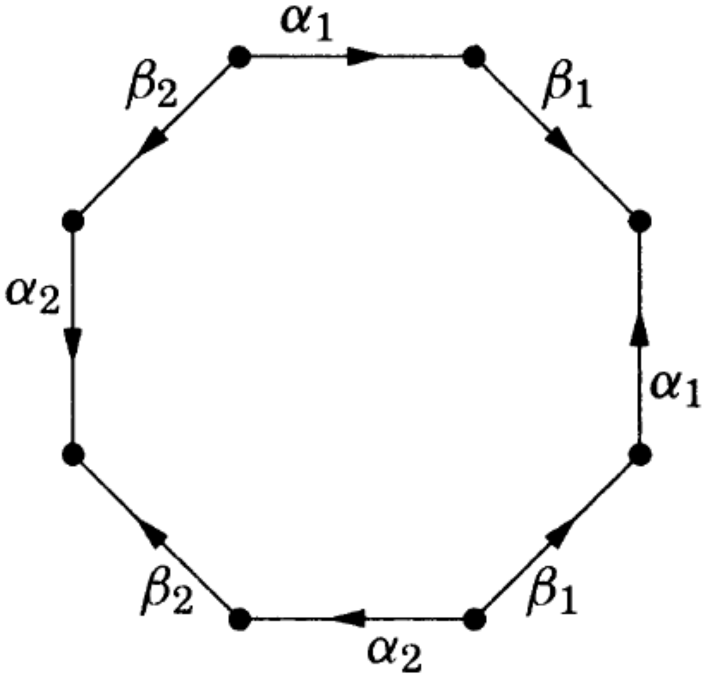




- 2γ Schnitte durch einen Punkt bis flach
- Repräsentation in der Ebene durch ein 4γ–gon
  z.B. 4-Eck bei einem torodialen Graphen (γ=1)

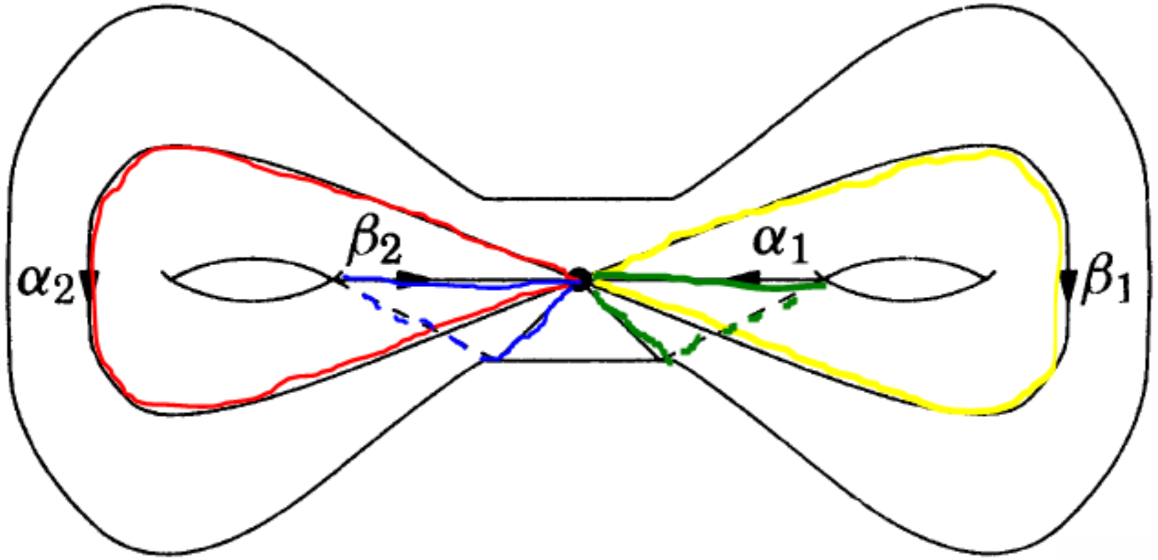




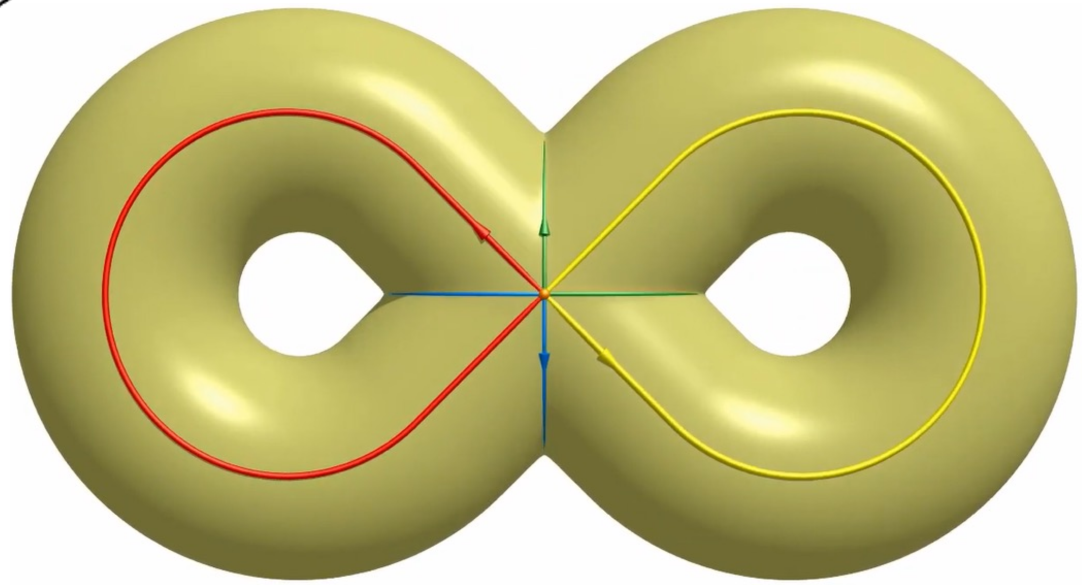


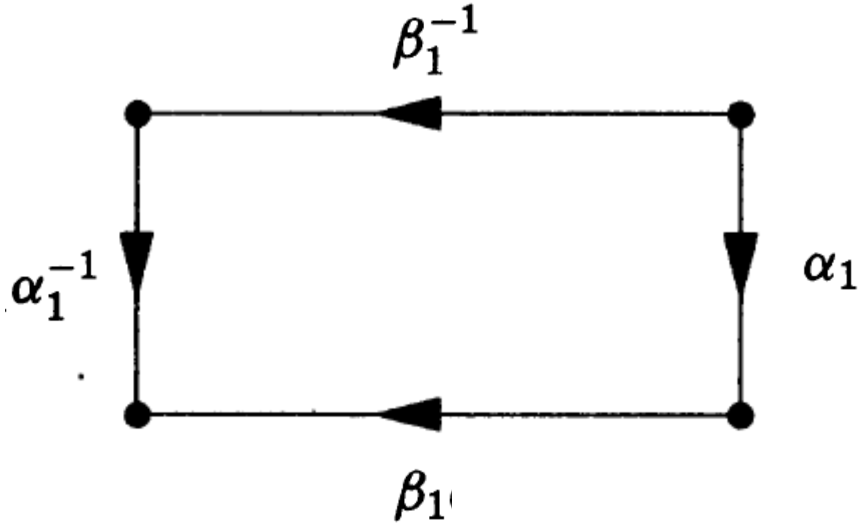
- Repräsentation in der Ebene durch ein 4γ–gon
  z.B. Oktagon bei doppeltorodialen Graphen (γ=2)

https://www.youtube.com/watch?v=G1yyfPShgqw

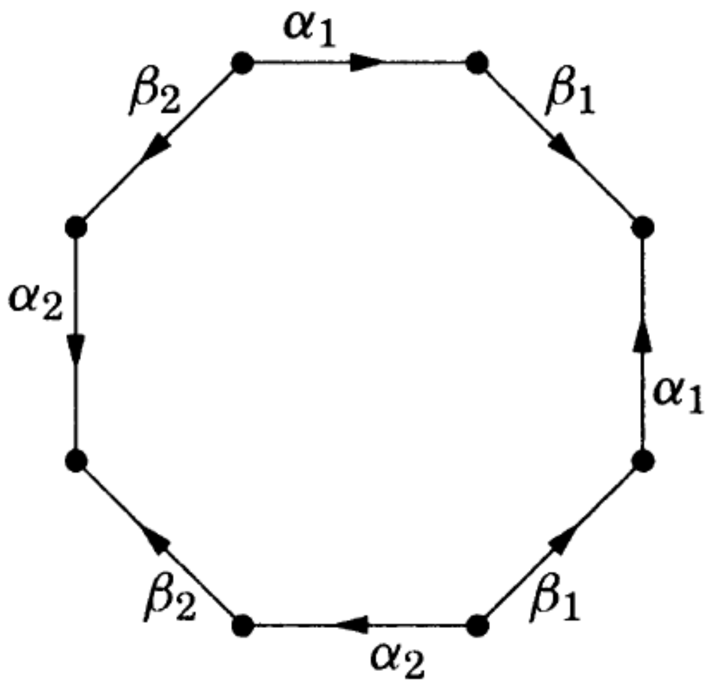


- 2γ Schnitte durch einen Punkt bis flach
- 2γ Schleifen um einen einzelnen Knoten





γ = 1: $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}$



γ = 2: $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}$

Allgemein für Geschlecht γ: $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_\gamma\beta_\gamma\alpha_\nu^{-1}\beta_\nu^{-1}$

Bem. 1: Eulers Formel für S_γ

Für eine einfach-zusammenhängende Einbettung eines Graphs in S_γ wird Eulers Formel verallgemeinert zu:

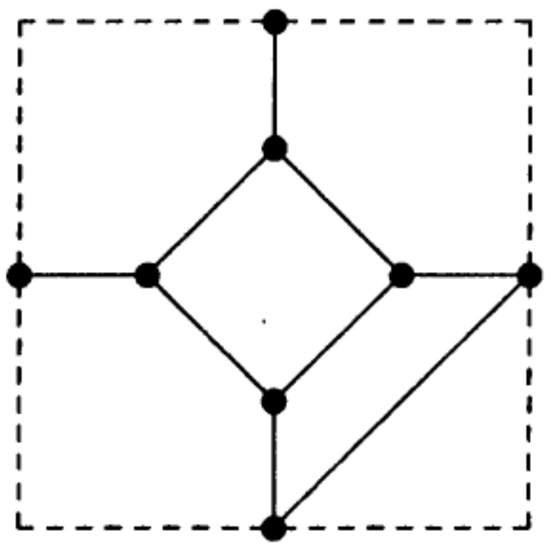
$$n - e + f = 2 - 2\gamma = \chi(S_\gamma) \quad \textit{Euler-Charakteristik von } S_\gamma$$

Lemma 1: Jeder einfache n-eckige Graph, der in S_γ eingebettet ist, hat höchstens

$$e \leq 3(n - 2 + 2\gamma)$$

Kanten.

Torodiale Einbettung von $K_{3,3}$



https://apps.hegl.mathi.uni-heidelberg.de/rectangle-to-torus-coloured/

Satz von Ringel-Youngs / Heawood Formel

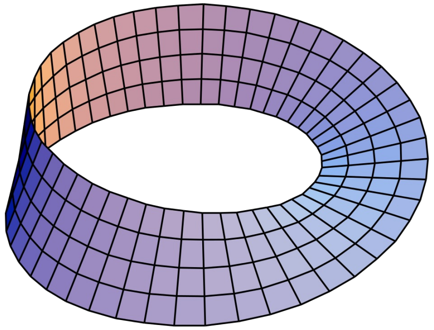
Wenn G in S_γ mit $\gamma > 0$ eingebettet werden kann, dann gilt

$$\chi(G) \leq \left\lfloor (7 + \sqrt{1 + 48\gamma})/2 \right\rfloor$$

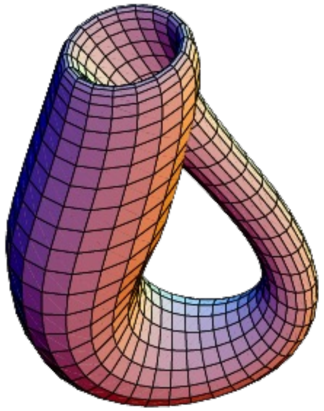
wobei $\chi(G)$ die Anzahl der benötigten Farben ist.

Achtung: Die Heawood-Formel gilt nur für orientierbare Flächen von Geschlecht $\gamma > 0$.

Gegenbeispiele:



Möbiusband



Kleinsche Flasche

Kugel