2.3 Perfekte Gleichgewichte und Nash-Gleichgewichte bei unvollständigen Informationen

Bisher bekannte Notation

- Σ_i Strategiemenge
- $\sigma_i \in \Sigma_i$ reine Strategie
- $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$ Strategieprofil
- $H_i(\sigma)$ Auszahlungsfunktion
- $G = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n ; H_1, \ldots, H_n ; I)$ Spiel in Normalform
- s_i gemischte Strategie

1. Perfekte Gleichgewichte

		Spieler 2	
		σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1	σ_{11}	100 0	100 0
	σ_{12}	-10 -10	40 40

$\Rightarrow \quad \sigma^* = (\sigma_{11}, \sigma_{12})$

$\sigma^{**} = (\sigma_{12}, \sigma_{22})$

		Spieler 2	
		σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1	σ_{11}	0, 100	0, 100
	σ_{12}	-10, -10	40, 40

für σ^*:

$$s_1' := ((1-\varepsilon), \varepsilon)$$

$$H_2(s_1', \sigma_{21}) = (1-\varepsilon)100 - 10\varepsilon = 100 - 110\varepsilon <$$

$$H_2(s_1', \sigma_{22}) = (1-\varepsilon)100 + 40\varepsilon = 100 - 60\varepsilon$$

$$\Rightarrow H_2(s_1', \sigma_{21}) < H_2(s_1', \sigma_{22})$$

Spieler 2

Spieler 1	σ_{21}	σ_{22}
σ_{11}	0, 100	0, 100
σ_{12}	-10, -10	40, 40

für σ^{**}:

S1: $s_2' = (\varepsilon, (1-\varepsilon))$

$H_1(\sigma_{12}, s_2') = (1-\varepsilon)40 - 10\varepsilon = 40 - 50\varepsilon >$

$H_1(\sigma_{11}, s_2') = 0$ $\Rightarrow H_1(\sigma_{12}, s_2') > H_1(\sigma_{11}, s_2')$

S2: $s_1' = (\varepsilon, (1-\varepsilon))$

$H_2(s_1', \sigma_{22}) = 100\varepsilon + (1-\varepsilon)40 = 40 + 60\varepsilon >$

$H_2(s_1', \sigma_{21}) = 100\varepsilon + (1-\varepsilon)(-10) = -10 + 110\varepsilon$

- **pertubiertes Spiel:** Normalspiel, in dem jede reine Strategie mit positiver Wahrscheinlichkeit (Minimumswahrscheinlichkeit) gewählt werden muss

- Def 2.22: **Minimumswahrscheinlichkeitsfunktion**

$$\eta : \cup_i \Sigma_i \to [0;1)$$, wobei $\forall i$ gilt:

1. $\forall \sigma_i \in \Sigma_i \cdot \eta(\sigma_i) > 0$
2. $\sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \eta(\sigma_i) < 1$

- perturbierte Strategiemengen

$$S_i(\eta) := \{ s_i \in S_i \mid s_i = (p_{i1}, \ldots, p_{im_i}),\ \forall j_i : p_{ij_i} \geq \eta(\sigma_{ij_i}) \}$$

• Def 2.23 perturbiertes Spiel $G(\eta)$

$$G(\eta) = (S_1(\eta), \dots S_n(\eta); H_1, \dots, H_n; I)$$

→ $S_j(\eta)$ perturbierte Strategiemenge

• Def 2.24:

In einem Normalformspiel G ist ein Strategietupel s^* ein perfektes Gleichgewicht von G wenn Folge $\{(s^t, \eta^t)\}_t$ existiert mit:

- $\eta^t \downarrow 0 \quad (t \to \infty)$
- $s^t \to s^* \quad (t \to \infty)$
- $\forall t$: s^t ist ein Nash-Gleichgewicht von $G(\eta^t)$

Lemma

- Jedes perturbierte Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht, jedes perturbierte Spiel hat ein perfektes Gleichgewicht
- s^* ist NGG $\Leftrightarrow$

$$H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ij}) < H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ik}) \Rightarrow p^*_{ij} = \eta(\sigma_{ij})$$

- Jedes perfekte Gleichgewicht ist ein Nash-Gleichgewicht, nicht jedes Nash-Gleichgewicht ist ein perfektes Gleichgewicht

Spieler 2

Spieler 1	σ_{21}	σ_{22}
σ_{11}	0, 100	0, 100
σ_{12}	-10, -10	40, 40

σ^{**}: Wir betrachten Folge von trembling Functions $\eta^t(\cdot) \equiv \frac{1}{t}$ (für $t \to \infty$) und Folge von Nash-Gleichgewichten s^t in $G(\eta^t)$ mit:

$$s_1^t = \left(\frac{1}{t}, \left(1 - \frac{1}{t}\right)\right) \qquad s_2^t = \left(\frac{1}{t}, \left(1 - \frac{1}{t}\right)\right)$$

		Spieler 2	
		σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1	σ_{11}	100 0	100 0
	σ_{12}	-10 -10	40 40

es gilt $s^t \to \sigma^{**}$ (offensichtlich)

z.z. $s^t = (s_1^t, s_2^t)$ ist NGG für hinreichen hohes t.

Es gilt $H_1(\sigma_{12}, s_2^t) > H_1(\sigma_{11}, s_2^t)$ und $H_2(s_1^t, \sigma_{22}) > H_2(s_1^t, \sigma_{21})$ für hinreichend großes t

$\to$ s^t NGG für t „groß genug" in $G(\eta^t)$

2. Gemischte Strategien und unvollständige Informationen

Matching Pennies

Spieler 2

Spieler 1	σ_{21} Kopf	σ_{22} Zahl
σ_{11} Kopf	-1 $+1$	$+1$ -1
σ_{12} Zahl	$+1$ -1	-1 $+1$

$s_1^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $S1: \quad H_1(K, s_2^*) = H_1(Z, s_2^*)$

$s_2^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Formale Beschreibung:

- $G = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_n; H_1, \dots, H_n; I)$
- $m := |\Sigma| < \infty$ m: Anzahl aller reinen Strategie-kombinationen in G

→ endlich viele Strategiekombinationen $(\sigma^1, \dots, \sigma^m \in \Sigma)$

- $$A_G = \left[\begin{pmatrix} H_1(\sigma^1) \\ \vdots \\ H_n(\sigma^1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} H_1(\sigma^m) \\ \vdots \\ H_n(\sigma^m) \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

beschreibt alle Auszahlmöglichkeiten eines Spielers i (H_i) in G, abhängig von der jeweiligen Strategiekombination σ^j.

		Spieler 2	
		σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1	σ_{11}	2 2	0 0
	σ_{12}	0 0	2,5 2,5

$$\sigma^1 = (\sigma_{11}, \sigma_{21})$$
$$\sigma^2 = (\sigma_{11}, \sigma_{22})$$
$$\sigma^3 = (\sigma_{12}, \sigma_{21})$$
$$\sigma^4 = (\sigma_{12}, \sigma_{22})$$

$$A_G = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \right)$$

- jeder Spieler hat sog. wahre Auszahlungsfunktion
- Auszahlungsfunktionen anderer Spieler durch Störterm überlagert

$$X_i : (\Omega, F, P) \to \mathbb{R}^m \quad (i = 1, \dots, n)$$

→ X_i^j stochastische Störung von i wenn $\sigma^j \in \Sigma$ gewählt wird

- unvollständige Information in G wird durch den Vektor von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \qquad \text{repräsentiert,}$$

wobei μ_i die unvollständige Information von $j \neq i$ über H_i repräsentiert

Diskrete Störung

	Spieler 2: σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1: σ_{11}	2, 2	0, 0
σ_{12}	0, 0	2,5, 2,5

μ_1, μ_2 wie folgend definiert

$$\mu_1 \ldots \begin{cases} (0,0,0,0) \ldots \text{m.W. } \frac{1}{2} \\ (0,3,0,0) \ldots \text{m.W. } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mu_2 \ldots \quad (0,0,0,0) \ldots \text{m.W. } 1$$

⇒ Auszahlungen von S2 allgemein bekannt

⇒ S2 unvollständig über Auszahlung von S1 informiert

Spieler 2

M1	σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1 σ_{11}	2 / 2	0 / 0
Spieler 1 σ_{12}	0 / 0	2,5 / 2,5

⇒ reines Koordinationsspiel

Spieler 2

M2	σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1 σ_{11}	2 / 2	3 / 0
Spieler 1 σ_{12}	0 / 0	2,5 / 2,5

⇒ Spiel mit dominanter Strategie

- perturbierte Auszahlung von i mit:

$$H_i^e(\sigma, x_i(\sigma)) = H_i(\sigma) + x_i(\sigma)$$

b) Stetige Störung: μ_i sind Gleichverteilungen auf $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$

mit $H_i^e(\sigma, x_i(\sigma)) = H_i(\sigma) + x_i(\sigma)$

- Die erwartete Strategie s_i^e ist:

$$s_i^e = \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{s}_i(x_i)\, d\mu_i$$

Bayes-Nash-Gleichgewicht

- Normalformspiel $G = (S_1, \dots, S_n; H_1, \dots, H_n; I)$

  mit unvollständigen Informationen

  $G_1 = (\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n; H_1^e, \dots, H_n^e; \mu; I)$

- $\tilde{s}^*(\cdot)$ Nash-Gleichgewicht, wenn kein Spieler für irgendeine Realisierung x_i von X_i profitabel von $\tilde{s}_i^*(x_i)$ abweichen kann. (Bayes-Nash-Gleichgewicht)

- n-Tupel von $\tilde{s}^*(\cdot)$ ist Bayes-Nash-Gleichgewicht wenn $\forall i$, $\forall$ Realisierungen von x_i:

$$s_i \in S_i \Rightarrow H_i^e(s_{-i}^{e*}, \tilde{s}_i^*(x_i), x_i) \geq H_i^e(s_{-i}^{e*}, s_i, x_i)$$

- Jedes Normalformspiel hat mindestens ein Bayes-Nash-Gleichgewicht $\tilde{s}^*$

Spieler 2

Spieler 1	σ_{21}	σ_{22}
σ_{11}	2, 2	2, ε_2
σ_{12}	ε_1, 2	4, 4

ε_i gleichverteilt in $[0; \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, $\varepsilon < 2$

geht die maximale Störung ε gegen 0:

		Spieler 2	
		σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1	σ_{11}	2, 2	2, 0
	σ_{12}	0, 2	4, 4

$s^* = ((0{,}5\ ,0{,}5),(0{,}5\ ,0{,}5))$ (gemischtes NGG)

$\sigma^* = (\sigma_{11}, \sigma_{21})$

$\sigma^{**} = (\sigma_{21}, \sigma_{22})$

Bayes - Nash- Gleichgewicht

Spieler 1 \ Spieler 2	σ_{21}	σ_{22}
σ_{11}	2, 2	2, ε_2
σ_{12}	ε_1, 2	4, 4

S1 : $\varepsilon_1 > 0$ $\quad s_2^e = (q, (1-q))$

$$\tilde{s}_1(\varepsilon_1) = \begin{cases} \sigma_{11} & \dots \quad \varepsilon_1 < 4 - 2q \\ \sigma_{12} & \dots \quad \varepsilon_1 > 4 - 2q \end{cases}$$

$$\Rightarrow s^* = ((0{,}5, 0{,}5), (0{,}5, 0{,}5))$$

S2 : $\varepsilon_2 > 0$ $\quad s_1^e = (p, (1-p))$

$$\tilde{s}_2(\varepsilon_2) = \begin{cases} \sigma_{21} & \dots \quad \varepsilon_2 < 4 - \frac{2}{p} \\ \sigma_{22} & \dots \quad \varepsilon_2 > 4 - \frac{2}{p} \end{cases}$$