Vortrag 1.3 – Gerechtes Teilen einer Perlenkette

1: Einleitung

Grundidee: Die Geometrie lässt sich auch für das Lösen nicht-geometrischer Probleme nutzen.

Vorgehensweise:

1) Parametrisierung des Raums aller möglichen Lösungen.

2) Definieren einer Funktion auf diesem Raum. Diese misst, inwieweit sich eine potenzielle Lösung von einer tatsächlichen unterscheidet.

3) Mithilfe der Symmetrie feststellen, dass die Funktion an einem bestimmten Punkt gleich Null ist.

2: Teilen einer Perlenkette

Situation: • Kette mit zwei Sorten von Perlen (weiß & schwarz)
→ zufällige Reihenfolge

Die Kette soll gerecht auf zwei Personen (A & B) aufgeteilt werden.

→ gerecht: Beide bekommen die gleiche Anzahl an weißen und schwarzen Perlen

Figure 1: A necklace with two kinds of beads.

→ 24 Perlen (12 w, 12 s)

Teilen mit einem Schnitt:

Person A erhält 7s und 5w
Person B erhält 5s und 7w

↳ zwei Schnitte:

Person A erhält mittleren Teil
Person B erhält die äußeren

Wissen:

A soll insgesamt 12 Perlen erhalten ⇒ zwischen den Schnitten liegen 12 Perlen

Halten fest: Schnitt 1 nach Perle j
⇒ Schnitt 2 nach Perle j+12

Allgemein gilt: Kette hat insgesamt 2n Perlen
⇒ Schnitte liegen n Perlen auseinander

- Wenn A die richtige Anzahl an schwarzen Perlen erhält, erhält sie automatisch auch die richtige Anzahl an weißen

Figure 1: A necklace with two kinds of beads.

⇒ Überlegung: Überschuss wechselt in ein Defizit
⇒ Es muss eine Stelle geben, an der die richtige Anzahl an schwarzen und weißen Perlen getroffen wird.

3: Parallelogramm der Möglichkeiten

⇒ Perlenkette mit drei Sorten von Perlen (weiß, schwarz, grau) wird auf zwei Personen (A, B) aufgeteilt

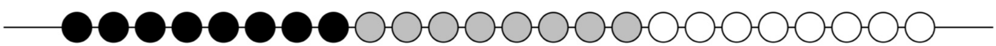

Figure 3: A necklace with three kinds of beads.

Legen fest: Perlenkette mit $2s$ schwarzen, $2w$ weißen, $2g$ grauen Perlen

Ziel: Kette in vier Teile P_1, P_2, P_3, P_4 teilen, sodass:
- $P_1 \cup P_3$ enthalten s schwarze, w weiße und g graue → A
- $P_2 \cup P_4$ –"– → B

Sei $n = s + w + g$. ⇒ Kette hat eine Perle bei jeder ganzen Zahl von 1 bis $2n$.

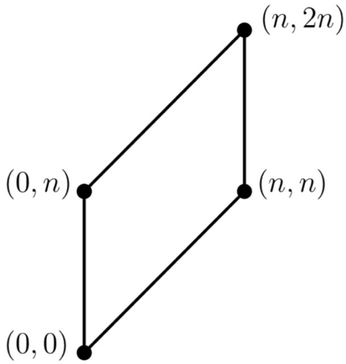

Figure 4: The parallelogram Q parametrizing certain divisions of the necklace.

$\leadsto$ Jedem Punkt (x, y) mit ganzzahligen Koordinaten in Q wird eine Teilung der Kette in die vier Teile P_1, P_2, P_3, P_4 zugeordnet, sodass $\#(P_1 \cup P_3) = \#(P_2 \cup P_4)$

1. Schnitt: nach Perle x
2. Schnitt: nach Perle y

3. Schnitt: nach Perle in Pos. $z = y - x + n$

Länge der Teile:
P_1: x
P_2: $y - x$
P_3: $z - y = n - x$
P_4: $2n - z = x - y + n$

Jede solche Teilung korrespondiert zu einem ganzzahligen Punkt in Q.

Kette als Intervall $(0, 2n]$
$\Rightarrow$ Teilung erfolgt in $P_1 = (0, x]$; $P_2 = (x, y]$
$P_3 = (y, y - x + n]$; $P_4 = (y - x + n, 2n]$

4: Überprüfen der Gerechtigkeit

Nun: geeignete Funktion aufstellen
$\Rightarrow$ Überschuss von schw. und gr. Perlen in $P_1 \cup P_3$ an jedem Punkt angeben.

Zu $(x,y) \in Q$ ordnen das Paar $(\beta - s, \gamma - g)^{(*)}$ zu.

β ist Anzahl der schwarzen Perlen in P_1 und P_3.
γ –"– grauen –"–

Sei $f(x,y)$ das Paar (*), das (x,y) zugeordnet wird.

Annahme: $\exists (x,y) \in Q$, sodass $f(x,y) = (0,0)$
$\Rightarrow P_1$ und P_3 enthalten zusammen s schwarze und g graue Perlen
$\Rightarrow$ Teilung gerecht

Länge von P_1 und P_3 ist n Perlen
$\wedge$ $s + g + w = n$ $\Rightarrow$ richtige Anzahl w weißer Perlen in $P_1 \cup P_3$

$\Rightarrow$ Haben Funktion f festgelegt, die die Gerechtigkeit der Teilung misst.
Ziel: Punkt finden, an dem f gleich Null wird.

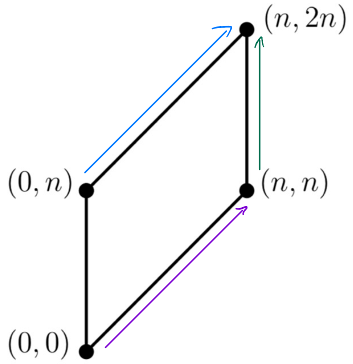

Figure 4: The parallelogram Q parametrizing certain divisions of the necklace.

$(0,0)$: 1. und 2. Schnitt vor der ersten Perle
$\Rightarrow$ 3. Schnitt nach Perle $z = n$
P_3 enthält die ersten n, P_4 die zweite Hälfte

$(0,0) \rightarrow (n,n)$: Verlängern von P_1
$x = y \Rightarrow P_2$ hat Länge 0
$\Rightarrow$ über die gesamte Kante hat $P_1 \cup P_3$ die ersten n Perlen der Kette
$\Rightarrow f$ konstant

$(n,n) \rightarrow (n,2n)$: $x = n \Rightarrow P_1$ bleibt gleich, enthält die ersten n Perlen
3. Schnitt: $z = y - x + n = y$
$\Rightarrow$ an gleicher Stelle wie der zweite Schnitt
$\Rightarrow P_1 \cup P_3$ entspricht wieder der ersten Hälfte der Kette

$\Rightarrow f$ ist konstant von $(0,0)$ über (n,n) bis $(n,2n)$.

$(0,n)$: Schnitte bei 0, n, $n-0+n = 2n$

$\Rightarrow$ P_1 und P_4 haben Länge 0

P_2 ist von 0 bis n, P_3 von n bis $2n$

Vergleich mit $(0,0)$ und $(n,2n)$ gibt: $P_1 \cup P_3$ und $P_2 \cup P_4$ wechseln

$\Rightarrow$ $f(0,n) = -f(0,0) = -f(n,2n)$

Diese Symmetrie lässt sich auf die Ränder, ausgehend von $(0,n)$ erweitern.

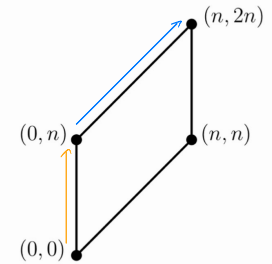

Figure 4: The parallelogram Q parametrizing certain divisions of the necklace.

Die Punkte sind der Form $(a, n+a)$ mit $0 \leq a \leq n$.
Korrespondenz:
P_1: $(0, a]$
P_2: $(a, a+n]$
P_3: $(a+n, 2n]$
P_4: leer

Die Punkte sind der Form $(0, a)$ mit $0 \leq a \leq n$.
Korrespondenz:
P_1: leer, P_2: $(0,a]$, P_3: $(a, n+a]$, P_4: $(n+a, 2n]$

$\Rightarrow$ Zwischen $(a, n+a)$ und $(0, a)$ wechseln die Rollen von $P_1 \cup P_3$ und $P_2 \cup P_4$

$\Rightarrow$ $f(a, n+a) = -f(0,a)$ für $\forall a$ $0 \leq a \leq n$

5: Nullen finden

Wenn $f(0,0) = (0,0)$ ⇒ Ein Schnitt in der Mitte die Kette gerecht
→ fertig

Sonst Annahme:
erste Koordinate von $f(0,0)$ ist ungleich

$f_1 := 1.$ Koord.: zählt den Überschuss oder Defizit der schwarzen Perlen in P_1 und P_3

$f_2 := 2.$ Koord: zählt den Überschuss oder Defizit der grauen Perlen in P_1 und P_3

Betrachten f_1 am Rand von Q von $(0,0)$ nach $(0,n)$

$f(0,n) = -f(0,0)$ ⇒ Vorzeichen von f_1 wechselt
⇒ an diesem Rand geht f_1 eine ungerade Anzahl mal durch Null

Problem: f_1 könnte unendlich oft Null sein

Betrachten deshalb $f_1 + \frac{1}{2}$, denn
$\frac{1}{2} < 1$ und $f_1(0,0)$ ist ganzzahlig und ungleich Null
⇒ Vorzeichen von $f_1 + \frac{1}{2}$ wechselt am linken Rand von Q.

$f(0,n) = -f(n,2n)$ ⇒ $f_1 + \frac{1}{2}$ hat ungerade Anzahl an Nullen am Rand von $(0,n)$ nach $(n,2n)$

Außerdem: $f(a, n+a) = -f(0, a)$

Also $f_1 + \frac{1}{2}$ postiv (bzw neg.) am oberen Rand von Q für jede ganze Zahl a $\Rightarrow f_1 + \frac{1}{2}$ negativ (bzw pos) am linken Rand

$\Rightarrow$ $f_1 + \frac{1}{2}$ wechselt Vorzeichen gleich oft am oberen wie am linken Rand.

Da f an den anderen beiden Rändern konstant ist, gibt es keine weiteren Nullstellen von $f_1 + \frac{1}{2}$ am Rand von Q.

$\Rightarrow$ $f_1 + \frac{1}{2}$ hat $2k$ Nullstellen mit (k ungerade)

$\Rightarrow$ exakt k Nullstellen von $f_1 + \frac{1}{2}$ am Rand von Q, an denen f_2 positiv ist

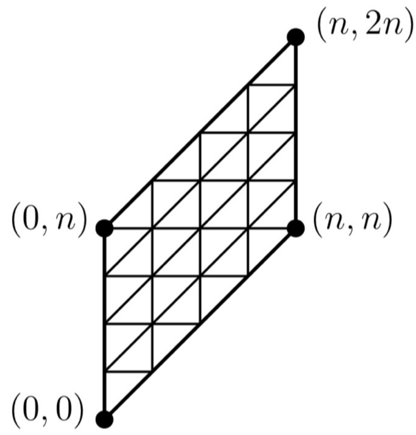

Figure 5: Splitting Q into triangles. Here $n = 4$.

f_1 hat ganzzahlige Werte an Punkten mit ganzzahligen Koordinaten $\Rightarrow f_1 + \frac{1}{2}$ ist nie 0 an Ecken der Dreiecke

Nullstellen von $f_1 + \frac{1}{2}$ können nur auftreten, wenn f_1 das Vorzeichen von einem Endpunkt der Kante zum anderen wechselt.

Somit: Wenn $f_1 + \frac{1}{2}$ NST in einem kleinen Dreieck hat
$\Rightarrow$ Dreieck besitzt ein Liniensegment aus NST das die zwei NST am Rand des Dreiecks verbindet

$\Rightarrow$ Nullstellen von $f_1 + \frac{1}{2}$ treten in unverzweigten Pfaden auf, die entweder auf dem Rand von Q starten/enden oder in Schlaufen zusammenlaufen.

⇒ 2k NST von $f_1 + \frac{1}{2}$ auf dem Rand von Q sind Paaren durch Pfade von NST verknüpft.

⇒ Mindestens einer dieser Pfade muss einen Punkt auf dem Rand von Q mit positiven f_2 mit einem Punkt mit negativen f_2 verbinden.

⇒ Es existiert ein Punkt, an dem $f_2 = 0$

⇒ Punkt mit $f_1 + \frac{1}{2} = 0$ und $f_2 = 0$

⇒ Korrespondenz:
- grauen Perlen werden gerecht geteilt.
- bis auf eine halbe Perlen werden die Schwarzen Perlen gerecht geteilt.

⇒ Haben gerechte Teilung der Kette mit drei Schnitten.