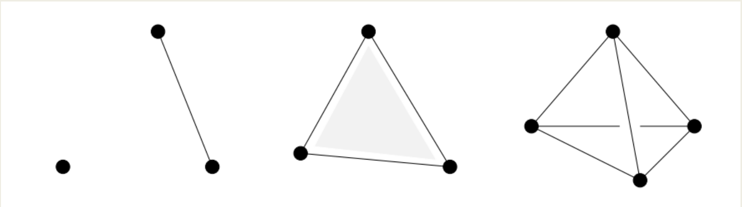
DAS LEMMA VON SPERNER

Das Lemma von Sperner

- Emanuel Sperner (1905-1980)
- 1928
- Dissertation: „Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes“
- (fast) neidfreie Aufteilung eines Kuchens

Definitionen



0 1 2 3

- n-Simplex (n ∈ $\mathbb{N}$): n-dimensionaler Körper mit n+1 Grenzpunkten
- n-Facette: (n-1)-Simplex eines n-Simplex mit n Grenzpunkten
- n-Unterteilung: Unterteilung eines n-Simplex in mehrere kleinere n-Simplexe
- elementarer n-Simplex: durch n-Unterteilung erzeugter n-Simplex
- Sperner-Beschriftung: Beschriftung aller Knoten einer n-Unterteilung mit 1, …, n+1
  1. *Grenzpunkte des „großen“ n-Simplex paarweise verschieden*
  2. *Knoten entlang von n-Facetten: nur Bezeichnungen ihrer Grenzpunkte*
  3. *restliche Knoten: beliebig*
- voll-beschriftet: elementarer Simplex mit paarweise verschieden beschrifteten Endpunkten

DAS SPERNER-LEMMA

Eine n-Unterteilung eines n-Simplex mit Sperner-Beschriftung enthält eine ungerade Anzahl an voll-beschrifteten elementaren n-Simplexen. Insbesondere gibt es mindestens einen.

Beweis: vollständige Induktion

- **Induktionsanfang:** n=1
- **Induktionsannahme:** Die Anzahl der voll-beschrifteten elementaren (n-1)-Simplexe ist mindestens 1 und ungerade.
- **Induktionsschritt:** (n-1) → n
  - *n-Simplex ≙ Haus*
  - *elementare Simplexe ≙ Zimmer*
  - *Facette eines elementaren Simplex ≙ Tür ⇔ Grenzpunkte sind mit 1, …, n beschriftet*
  - *Tür an Facetten des großen Simplex ≙ Haupttür*
  - *Tür innerhalb des großen Simplex ≙ Nebentür*
  - *„Weg“ durch Türen in Zimmer ≙ Pfad*
  - *Pfad durch Haupttür ≙ Hauptpfad*
  - *Pfad ohne Haupttür ≙ Nebenpfad*

Beweis: vollständige Induktion

Induktionsschritt – Beobachtungen:

- Zimmer hat 0-2 Türen
- Zimmer hat genau eine Tür ⇔ Zimmer ist voll-beschriftet
- Haupttüren: nur an einer einzigen Facette des Simplex
- Anzahl der Haupttüren: ≥ 1 und ungerade
- Pfade enden:
  - *Hauptpfade:*
    - in anderer Haupttür → irrelevant
    - in einer Sackgasse → voll-beschriftetes Zimmer

    } ungerade Anzahl an voll-beschrifteten Zimmern
  - *Nebenpfade:*
    - verbinden zwei voll-beschriftete Zimmer → paarweise
    - Weg ist ein Kreis → irrelevant

    } gerade Anzahl an voll-beschrifteten Zimmern

→ Gesamtzahl der voll-beschrifteten Zimmer: ungerade Anzahl + gerade Anzahl = ungerade Anzahl √

☐

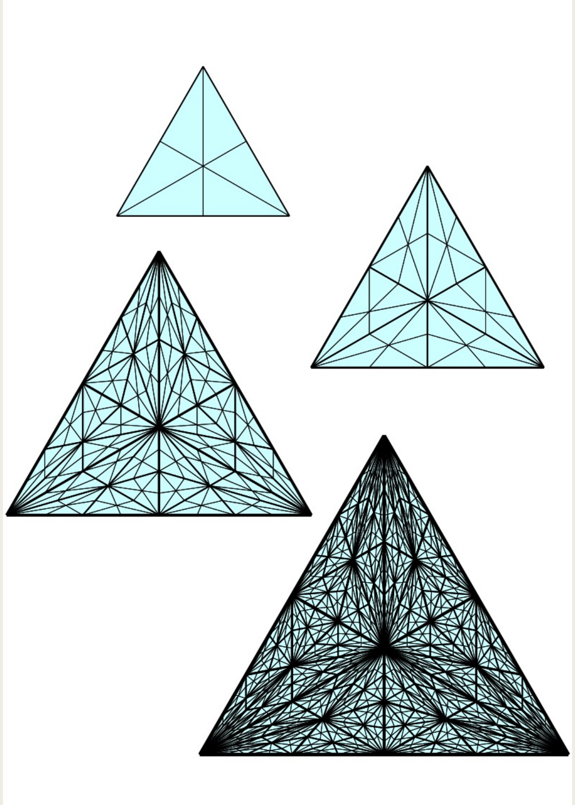
Sperner-Lemma und Kuchenteilung

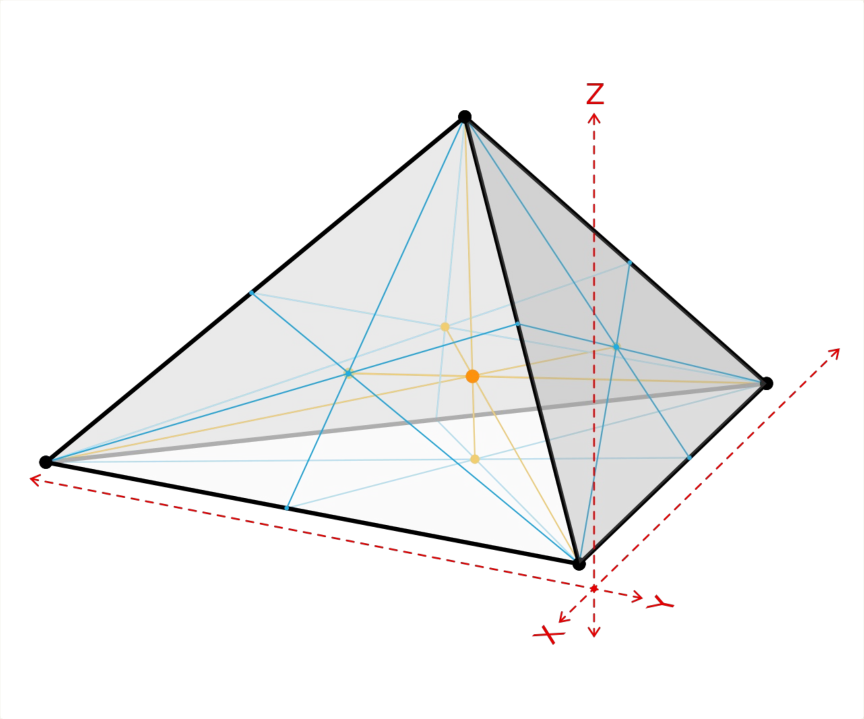
- Annahmen:
  - *jeder Spieler präferiert in jeder Aufteilung mind. ein Kuchenstück*
  - *die Spieler sind hungrig*
  - *die Präferenzmengen der Spieler sind geschlossen*
- Theorem: „Für hungrige Spieler mit geschlossenen Präferenzmengen existiert für jeden Kuchen eine neidfreie Aufteilung."
- Beweis für n = 3:
  - *Grenzpunkte* $\triangleq$ *Folgen* $(a_i, b_i, c_i)_{i=1, \ldots, \infty}$
  - *konvergente Teilfolgen:* $a_i \rightarrow a$, $b_i \rightarrow b$, $c_i \rightarrow c$
  - *immer feinere Unterteilung:* $|a_i b_i| \rightarrow 0$, $|a_i c_i| \rightarrow 0$, $|b_i c_i| \rightarrow 0$

    => $a_i \rightarrow p$, $b_i \rightarrow p$, $c_i \rightarrow p$
  - *o.B.d.A.: Spieler A wählt Stück 1, Spieler B wählt Stück 2, Spieler C wählt Stück 3*
  - *abgeschlossene Präferenzmengen => p repräsentiert eine neidfreie Aufteilung* □

Sperner-Lemma und Kuchenteilung

- Beweis für n > 3: baryzentrische Unterteilung





Praxis: ε-Annäherung

- Unterteilung mit Maschenweite < ε
- Elementarsimplex: Aufteilungen unterscheiden sich um ε → alle Aufteilungen des Elementarsimplex erzeugen Zufriedenheit bis auf ε

Ähnliche Probleme

- positive Aufteilung: Kuchenteilung
- negative Aufteilung: neidfreie Verteilung von Aufgaben
- positive und negative Aufteilung: Zimmer und Miete eines Hauses aufteilen

Fixpunktsatz von Brouwer

- „Jede stetige Abbildung f: $B^n \rightarrow B^n$ einer n-dimensionalen Kugel auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt (also einen Punkt $x \in B^n$ mit $f(x) = x$)."
  - *B^n: kompakte, konvexe Menge*
- anschauliches Beispiel: „Kaffeesatz"
- 1912 → Beweis: ab Dimension 2 kompliziert
  - *1929: Lemma von Sperner (Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz)*

Quellen

- Aigner, M., Ziegler, G.: *Das BUCH der Beweise.* [5]2018.
- Hertling, C.: *Spieltheorie II. 2-stündige Vorlesung im FSS 2018. Mannheim*. 2018.
- Su, F. E.: „Rental Harmony: Sperner‘s Lemma in Fair Division.“ *The American Mathematical Monthly,* Dec. 1999, Vol. 106, No. 10. S. 930-942.
- Wunsch, M.: *Kuchen gerecht teilen. Zusammenfassung des Vortrags.* 2008.
- https://www.studysmarter.de/studium/mathematik-studium/topologie/brouwer-fixpunktsatz/ (16.04.2024)
- Bildquellen:
  - *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/98/Emanuel_Sperner.jpg (13.04.2024)*
  - *https://i.stack.imgur.com/O6xtg.png (13.04.2024)*
  - *https://de.wikipedia.org/wiki/Baryzentrische_Unterteilung#/media/Datei:Barycentric_subdivision.svg (15.04.2024)*
  - *https://de.wikipedia.org/wiki/Baryzentrische_Unterteilung#/media/Datei:Barycentric_subdivision_of_a_3-simplex.svg (15.04.2024)*
  - *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5a/Bohr_Brouwer_Zurich1932.tif/lossy-page1-264px-Bohr_Brouwer_Zurich1932.tif.jpg (16.04.2024)*