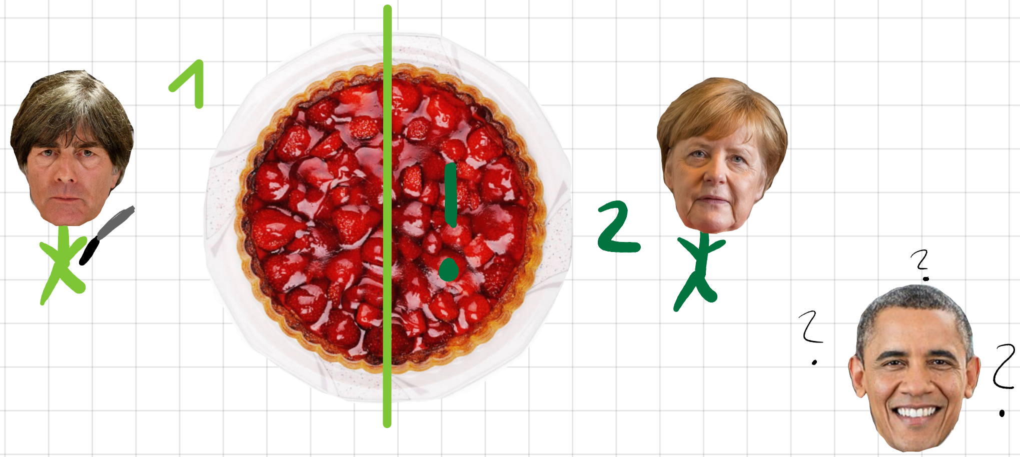
Grundlagen & verschiedene Protokolle



Ziel → Verallgemeinerung dieses Algorithmus/Rezepts/Protokolls auf ≥ 3 Spieler

Grundlagen

1.1. Sei K nichtleere Menge (der Kuchen). Eine

a) σ-Algebra auf K ist eine Menge W von Teilmengen von K mit folgenden Eigenschaften:

i) $K \in W$

ii) $A \in W \Rightarrow K - A \in W$

iii) $A_i \in W$ für $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in W$

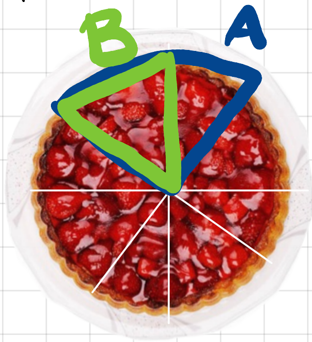
b) Seien K nichtleere Menge & W eine σ-Algebra. Ein abzählbares additives Maß auf W ist eine Funktion $\mu : W \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in W$

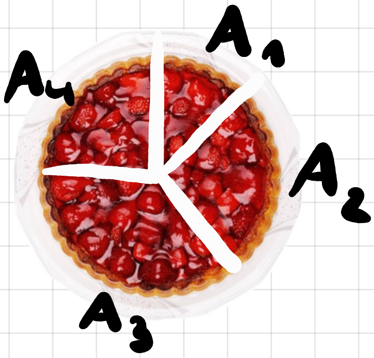
ii) $\mu(\emptyset) = 0$

iii) Falls $A_i \in W$, $i \in \mathbb{N}$, lauter disjunkte Teilmengen von K sind, ist $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$

Weiter heißt ein solches μ nicht-atomar falls es für jedes $A \in W$ mit $\mu(A) > 0$ ein $B \subset A$ mit $B \in W$ & $0 < \mu(B) < \mu(A)$



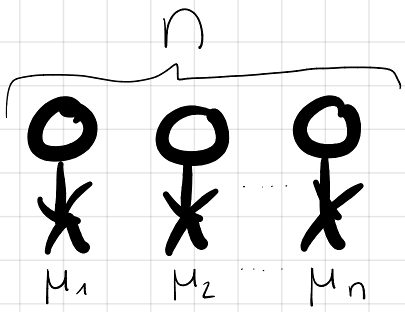
c) Eine Partition einer nichtleeren Menge K mit σ-Algebra W (kurz: eine Partition von (K, W)) ist ein Tupel $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ (für ein $m \in \mathbb{N}$) von disjunkten Teilmengen von K, die alle in W liegen & $K = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ erfüllen



1.2. (a) folgende Situation wird Standartsituation genannt: Gegeben sind eine nichtleere Menge K (der Kuchen), eine σ-Algebra W auf K, ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ & n abzählbar, additive nicht-atomare Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1, \dots, \mu_n$ auf W.

b) In der Standartsituation wird eine Partition von (K, W) mit $m = n$ eine Aufteilung von K genannt.

c) Eine mögliche & hier relevante Deutung: K ist der Kuchen, der auf n Spieler aufgeteilt werden soll. Jeder der Spieler hat seine eigene Art, Teile des Kuchens einzuschätzen (der eine mag mehr Schokolade, der andere Fruchtstücke, der dritte ein trockenes Teil) die Einschätzung des Spielers i wird durch das Maß μ_i von (K, W) gegeben



1.3. (Satz v. Lyapounov, 1940) In der Standartsituation (& auch im Fall $m=1$) ist die Menge
$\{(\mu_1(A), \dots, \mu_n(A)) \mid A \in W\} \subset [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$
abgeschlossen (äquivalent kompakt) & konvex im $\mathbb{R}^n$

μ_1 μ_2 μ_3

1.4. (Dvoretsky, Wald & Wolfowitz, 1951) In der Standartsituation (auch im Fall $n=1$) & für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ist die Menge
$\{(\mu_i(A_j))_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m} \mid (A_1, \dots, A_m) \text{ ist eine Partition von } (K,W)\}$
$\subset M(n \times m, [0,1]) \subset M(n \times m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \cdot m}$
abgeschlossen (äquivalent kompakt) & konvex in $M(n \times m, \mathbb{R})$

Korollar 1.5. (Satz von Neymann, 1946) In der Standardsituation gibt es für ein beliebiges Tupel $(p_1 ... p_n) \in [0,1]^n$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ von K mit $\mu_i(A_j) = p_j$ für alle $i,j \in \{1,..n\}$

Der Satz von Neymann sagt, dass es eine Aufteilung des Kuchens K gibt, bei der alle n Spieler jedes einzelne Stück Kuchen gleich bewerten, d.h. alle bewerten das j-te Kuchenstück mit dem Wert p_j. Im Fall $p_1 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ ist das nicht so schlecht. Keiner kann auf irgendeinen anderen neidisch sein.

2 Vorbehalte:

1) Die Aufteilung ist eine reine Existenzaussage. Der Mensch o. die Maschine, die sie ausführt, muss alle Einschätzungen μ_i kennen. Und er muss die Existenzaussage konstruktiv machen.

2) Wenn die Einschätzungen hinreichend verschieden sind, ist eine Aufteilung denkbar, bei der alle gewinnen, wo also jeder sein Lieblingsstück bekommt & alle nach ihrer Einschätzung mehr als einen Anteil von $\frac{1}{n}$ des Kuchens bekommen

1.6 (a) In der Standardsituation heißt eine Aufteilung $(A_1, \dots, A_n)$ von K proportional, falls für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\mu_i(A_i) \geq \frac{1}{n}$

(b) Sie heißt neidfrei, falls für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt: $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$

(c) Sie heißt effizient o. Pareto-optimal, falls es keine bessere Aufteilung gibt. Eine Aufteilung $(B_1, \dots, B_n)$ heißt besser als die Aufteilung $(A_1, \dots, A_n)$, falls $\mu_i(B_i) \geq \mu_i(A_i)$ für alle i & $\mu_i(B_i) > \mu_i(A_i)$ für mindestens ein i gilt.

Lemma 1.7 In der Standartsituation ist jede neidfreie Aufteilung von K auch proportional. Die Umkehrung gilt im Fall $n = 2$, aber nicht bei $n \geq 3$

Theorem 1.8 (Weller 1985, Barbanel 2005) In der Standardsituation gibt es eine Aufteilung von K, die neidfrei & Pareto-optimal ist

Mehr kann man sich fast nicht wünschen. Aber nur fast: Leider ist dies eine reine Existenzaussage. Der Vorbehalt (1) ist auch hier gültig. Es bleibt das Problem, welche & wie gute Aufteilungen man unter geeigneten Prämissen konstruktiv erreichen kann.

Lemma 1.9

(a) In der Standardsituation sei $A \subset K$ in W mit $\mu_i(A) > 0$ für einen Spieler i, & r sei eine Zahl in $]0, \mu_i(A)[$. Dann gibt es eine Menge $B \subset A$ mit $B \in W$ & $\mu_i(B) = r$

<u>Deutung</u>: Der Spieler i kann ein Kuchenstück $A \subset K$ in zwei beliebig große Stücke schneiden

(b) Unter den Voraussetzungen wie in (a) gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Aufteilung von A in Mengen $(B_1, \dots, B_k)$ mit $B_j \in W$ & $\mu_i(B_j) = \frac{\mu_i(A)}{k}$.

<u>Deutung</u>: Der Spieler i kann ein Kuchenstück $A \subset K$ in beliebig viele aus seiner Sicht gleich große Stücke schneiden

(c) Sind $A_1, A_2 \in W$ zwei Teilmengen von A mit $\mu_i(A_1) > \mu_i(A_2)$, so gibt es ein $B \subset A_1$ mit $B \in W$ & $\mu_i(B) = \mu_i(A_2)$

schneidet hier was ab

<u>Deutung</u>: Der Spieler i kann das Kuchenstück A_1 auf die Größe des Kuchenstücks A_2 trimmen, d.h. er kann von A_1 so viel abschneiden, dass der Rest aus seiner Sicht gleich groß wie A_2 ist.

Definition 1.10 Es werden die Standardsituation & die Deutung oben mit n Spielern angesetzt. Das heißt, K ist der Kuchen, der auf die n-Spieler aufgeteilt werden soll. Weiter werden folgende Standard-Prämissen vorausgesetzt:

A) Jeder Spieler will ein aus seiner Sicht (d.h. in seinem Maß μ_i) möglichst großes Stück des Kuchens erhalten

B) Fall α) Jeder Spieler ist mit einem Anteil von $\frac{1}{n}$ des Kuchens zufrieden. Er interessiert sich nicht für die Stücke der anderen. Das wird durch die proportionale Aufteilung gelöst.

Fall β) Jeder Spieler möchte ein Kuchenstück, das aus seiner Sicht mindestens so groß ist wie irgendein anderes Stück. Ansonsten interessieren ihn die Stücke der anderen nicht. Das wird durch eine neidfreie Aufteilung gelöst.

C) Jeder Spieler ist völlig risikoavers. Wenn er die Wahl zwischen einer Entscheidung hat, die seinen Wunsch in (B) erfüllt, & einer Entscheidung, die wahrscheinlich ein besseres Stück liefert, aber eventuell auch ein Stück, das seinen Wunsch in (B) nicht erfüllt, dann wird er die erste Entscheidung wählen.

(D) Jeder Spieler kennt nur sein Maß μ_i. Es gibt keinen Spieler o. Computer, der alle Maße kennt

(E) Jeder Spieler kann (nur) die Aktionen im Lemma 1.9 ausführen

Nun wird ein Algorithmus gesucht, mit dem eine Aufteilung gefunden werden kann, der unter den Standard-Prämissen funktioniert & die Wünsche in den Standard-Prämissen erfüllt. Im folgenden wird statt Algorithmus der Begriff Protokoll gebraucht

Definition 1.11 In der Standardsituation mit der Deutung mit n Spielern ist ein Protokoll eine Folge von Schritten, so dass in jedem Schritt einer der Spieler eine Wahl oder eine Teil-Aufteilung vornehmen muss & so dass folgendes gilt:

i) Unter den Standard-Prämissen wird eine proportionale (im Falle (B)(α)) bzw. neidfreie (im Falle (B)(β)) Aufteilung erreicht.

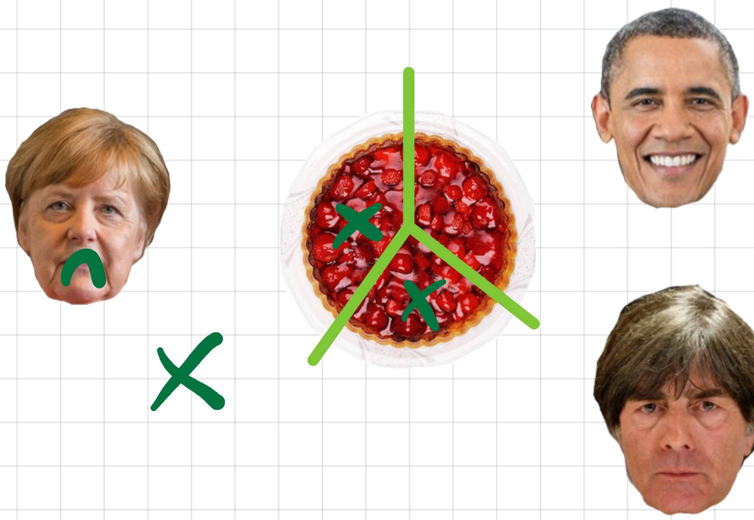
ii) Falls einer oder mehrere Spieler nicht völlig risikoavers handeln, so hat kein anderer Spieler einen Schaden dadurch (d.h. sein Wunsch in (B) wird immer noch erreicht), höchstens sie selber (sie können natürlich auch Glück haben)

Protokoll 1.1.2 (Proportionales Protokoll von Steinhaus 

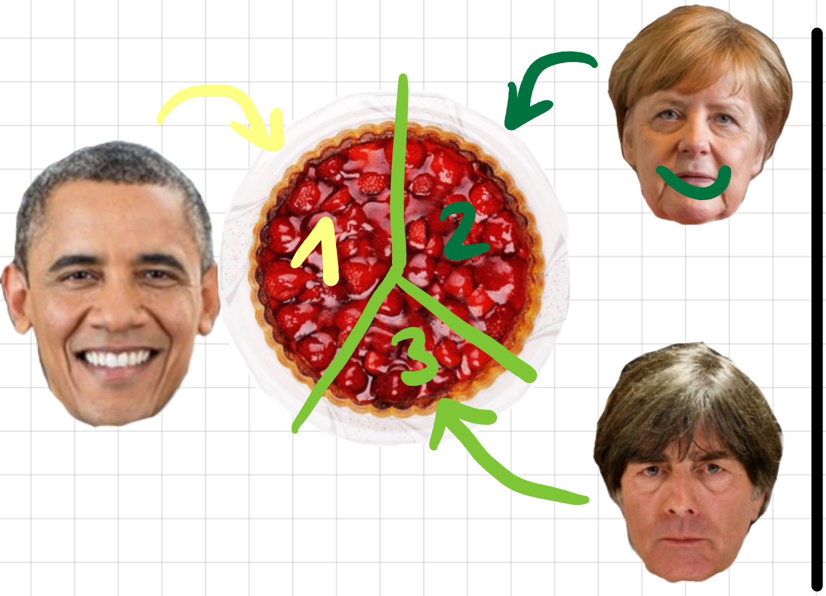
(1944) für n = 3 in der Version von Kuhn (1967))

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in 3 Teile.
   Strategie: Er sollte sie aus seiner Sicht gleich groß schneiden

2. Schritt: Spieler 2 kann aussetzen, oder er kann 2 Stücke als schlecht markieren
   Strategie: Er sollte 2 Stücke als schlecht markieren, falls aus seiner Sicht 2 Stücke kleiner als $\frac{1}{3}$ sind. Sonst sollte er aussetzen

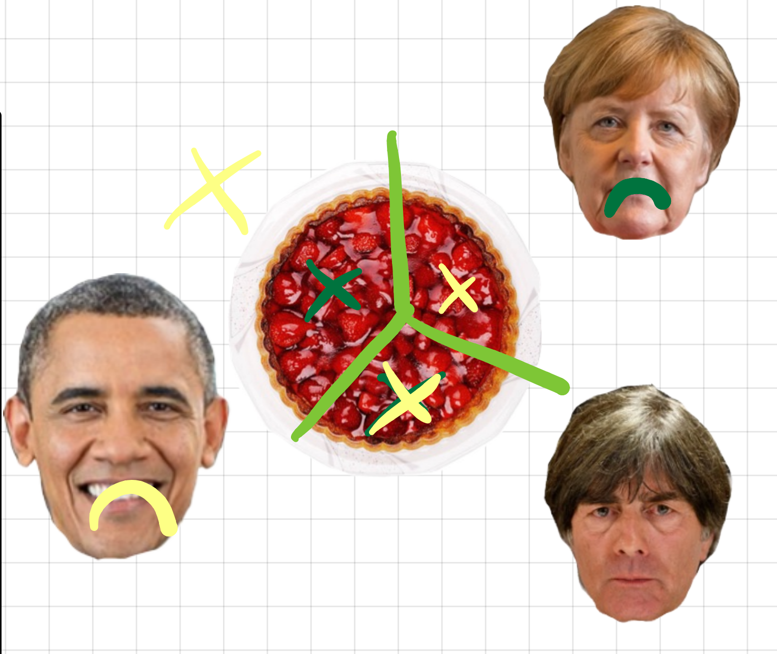


3. Schritt: Falls Spieler 2 ausgesetzt hat, nimmt Spieler 3 ein Stück, danach Spieler 2, danach Spieler 1 (= Schritte 4 & 5), mit den offensichtlichen Strategien, dann ist man fertig.

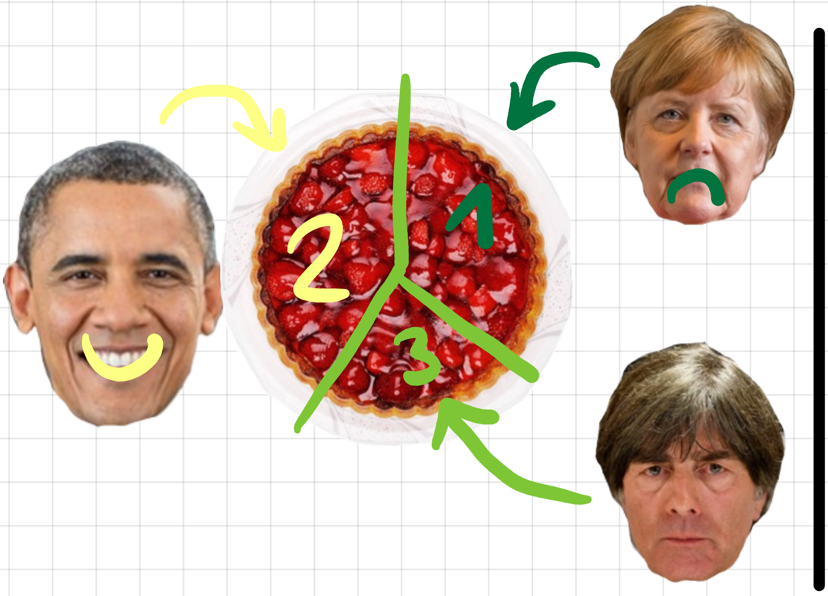


Im anderen Fall hat Spieler 2 zwei Stücke ja als schlecht markiert. Nun kann Spieler 3 auch 2 Stücke als schlecht markieren, oder Spieler 3 kann aussetzen

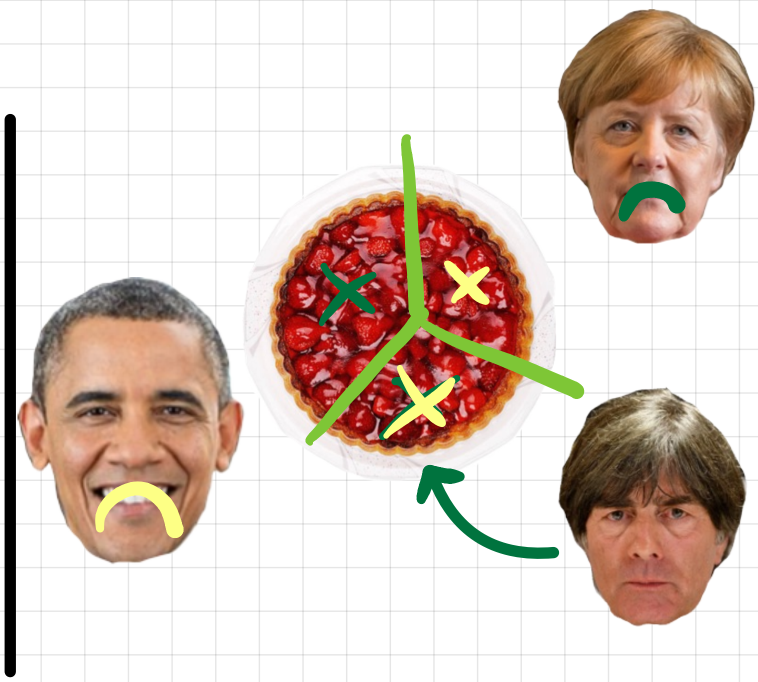
Strategie: Wie in 2. Schritt (die Markierungen von Spieler 2 sind für Spieler 3 egal)



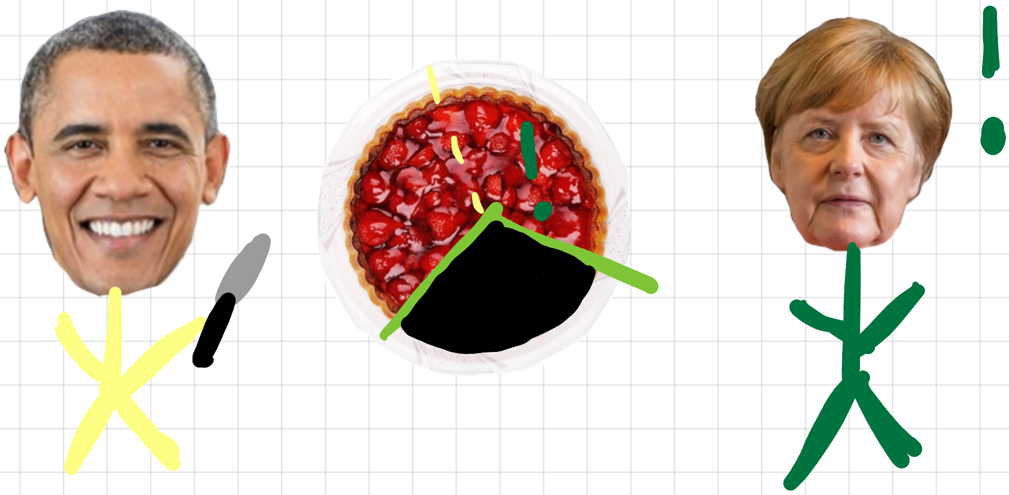
4. Schritt: Falls Spieler 3 ausgesetzt hat, nehmen die Spieler in der Reihenfolge 2, 3, 1 Stücke, mit den offensichtlichen Strategien, dann ist man fertig



Falls Spieler 3 nicht ausgesetzt hat, bekommt Spieler das eine oder eines der beiden Stücke die Spieler 2 & 3 als schlecht markiert hatten



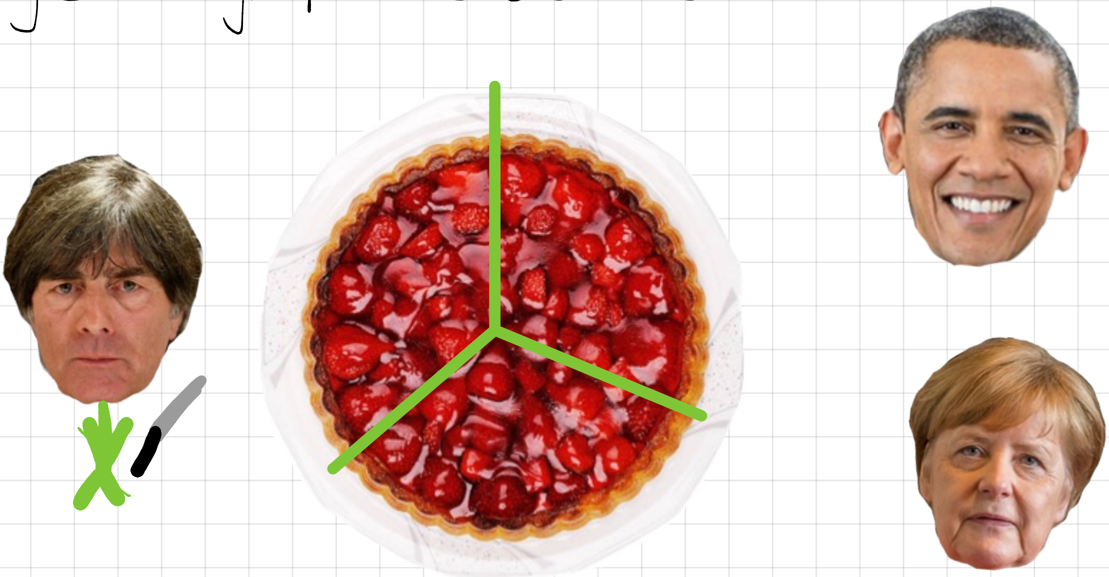
5. Schritt Die beiden anderen Stücke werden zusammengelegt. Nun spielen die Spieler 2 & 3 das Spiel „einer schneidet, der andere wählt". Dann ist man fertig.



Protokoll 1.1.6 (Neidfreies Protokoll von Selfridge & Conway (Anfang 1960er) für n=3

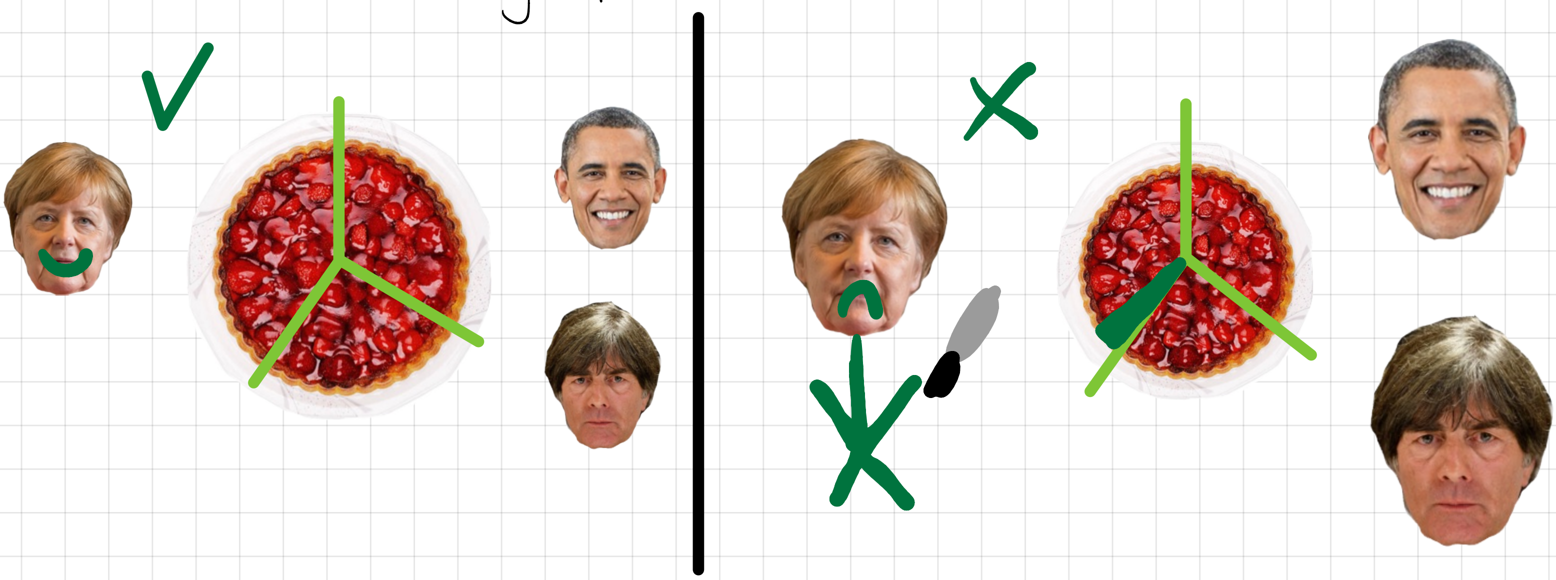
1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in 3 Stücke

Strategie: Er sollte ihn in 3 aus seiner Sicht gleich große Stücke schneiden



2. Schritt: Spieler 2 schneidet eventuell von einem Stück etwas ab oder macht nichts. Falls er etwas abschneidet, wird der Rest beiseitegelegt.

Strategie: Er sollte das aus seiner Sicht größte Stück auf die Größe des aus seiner Sicht zweitgrößten Stücks trimmen

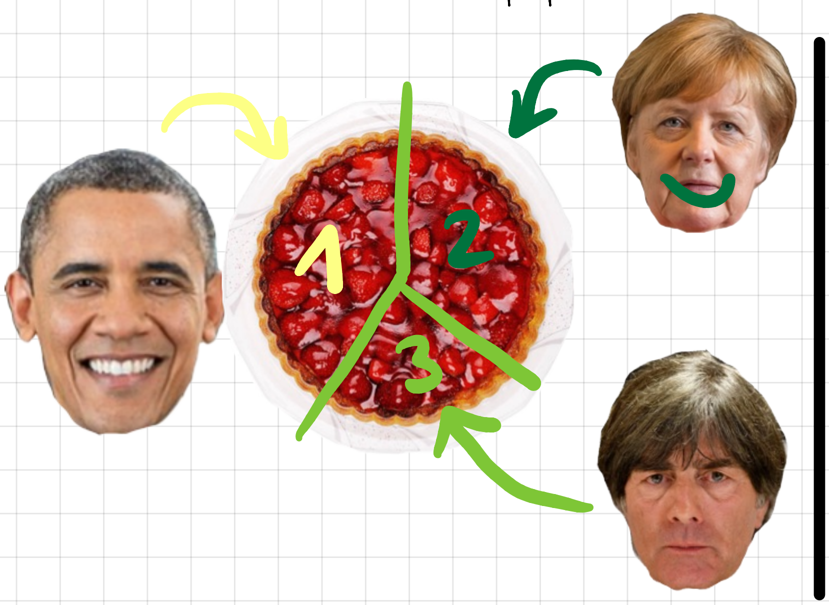


3. Schritt: Spieler 3, 2 & 1 nehmen in dieser Reihenfolge eines der 3 Stücke, unter folgender Regel für Spieler 2: 

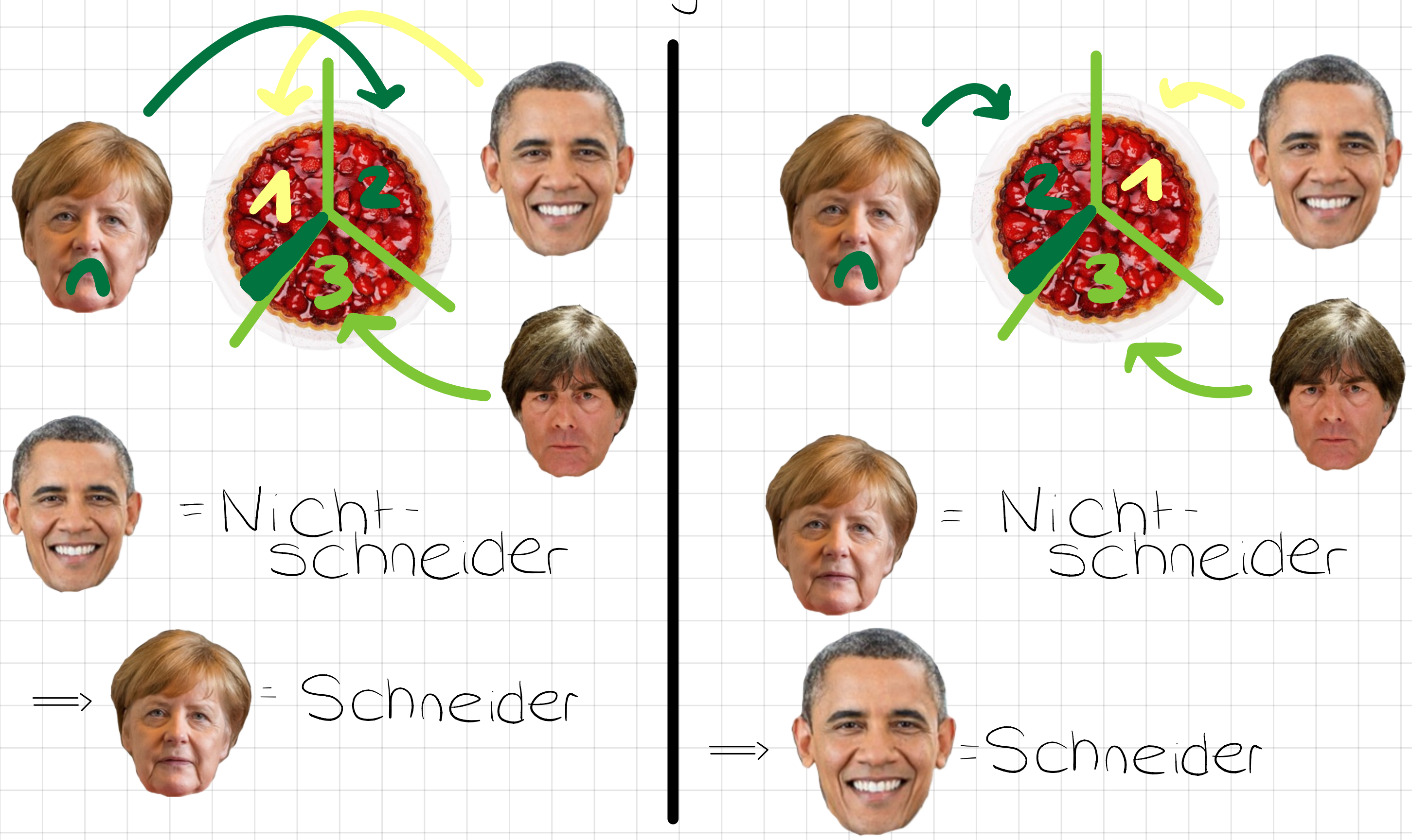
Falls er im Schritt 2 ein Stück beschnitten hatte muss er es nehmen, falls nicht Spieler 3 es vor ihm genommen hatte.

Strategien: Natürlich nimmt Spieler 3 ein aus seiner Sicht größtes Stück der 3 Stücke, & danach nimmt Spieler 2 ein aus seiner Sicht größtes der verbleibenden 2 Stücke, sofern er die Wahl hat & die Regel oben nicht greift

1. Fall: Spieler 2 hatte kein Stück beschnitten. Dann ist alles verteilt & das Protokoll stoppt.



2\. Fall: Spieler 2 hatte ein Stück beschnitten. Dann hat Spieler 3 oder Spieler 2 das beschnittene Stück genommen. Der Spieler von den Spielern 2 & 3, der das beschnittene Stück genommen hat, wird nun Nichtschneider genannt, der andere der Spieler 2 & 3 wird Schneider genannt.

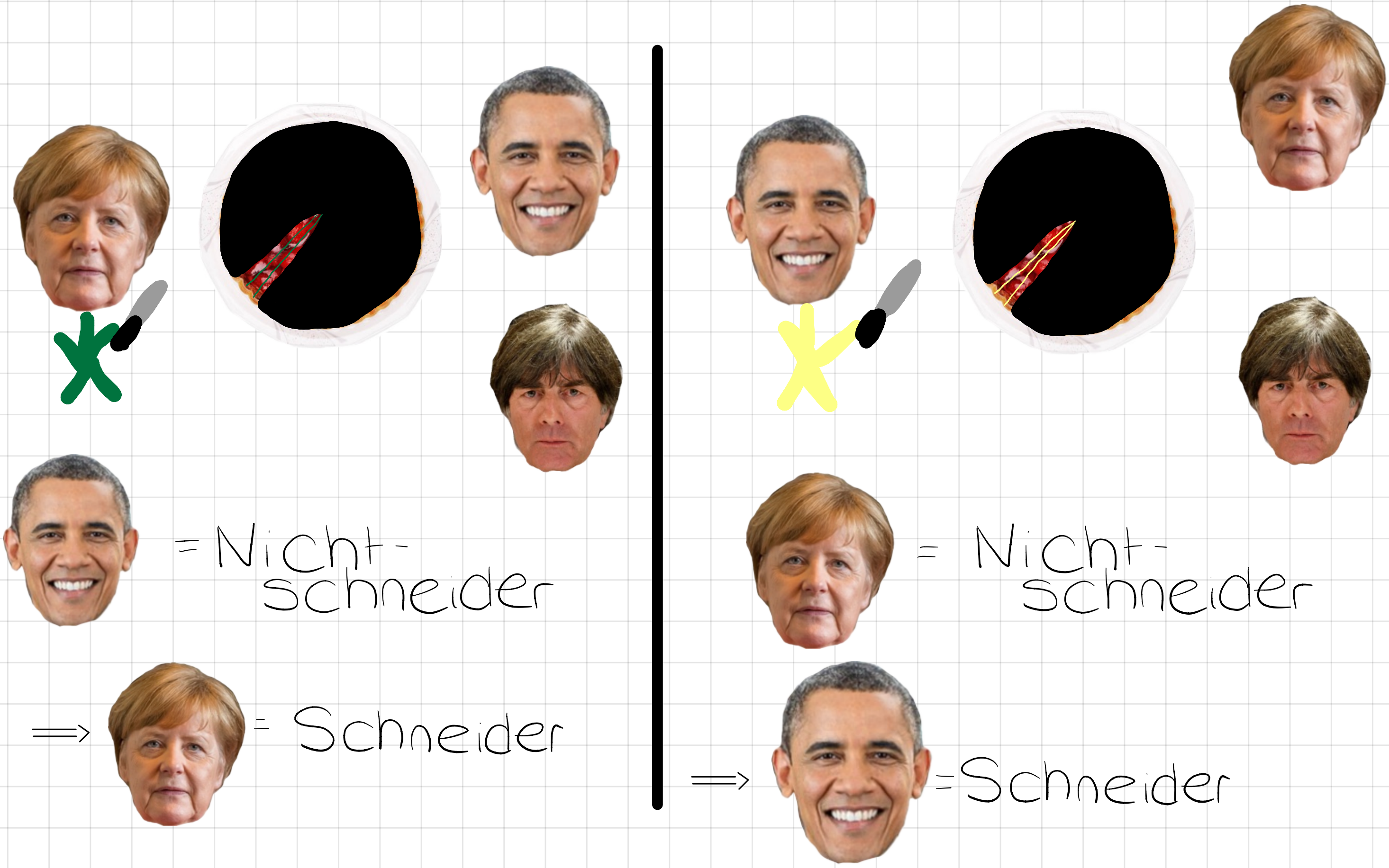


Spieler 1 hat in jedem Fall ein unbeschnittenes Stück genommen. Aus seiner Sicht hat er einen uneinholbaren Vorteil gegenüber dem Nicht-schneider, denn aus seiner Sicht ist sein Stück um den beiseite gelegten Rest größer als das beschnittene Stück, das ja der Nichtschneider bekommen hat

4. Schritt: (Nur noch im 2. Fall, sonst ist das Protokoll schon fertig)

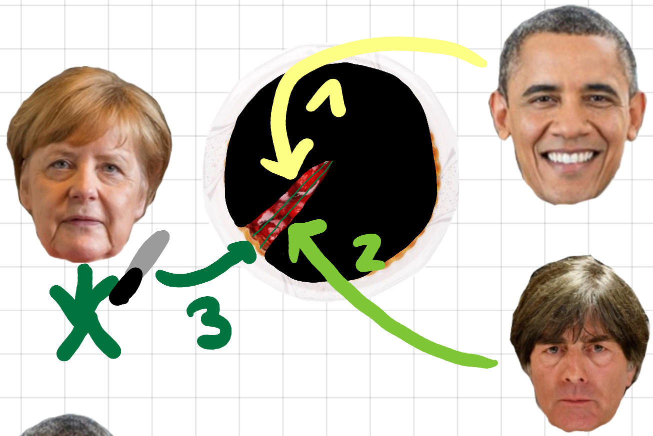
Der Schneider schneidet den Rest in 3 Teile

Strategie: Er sollte den Rest in 3 gleich große Teile schneiden



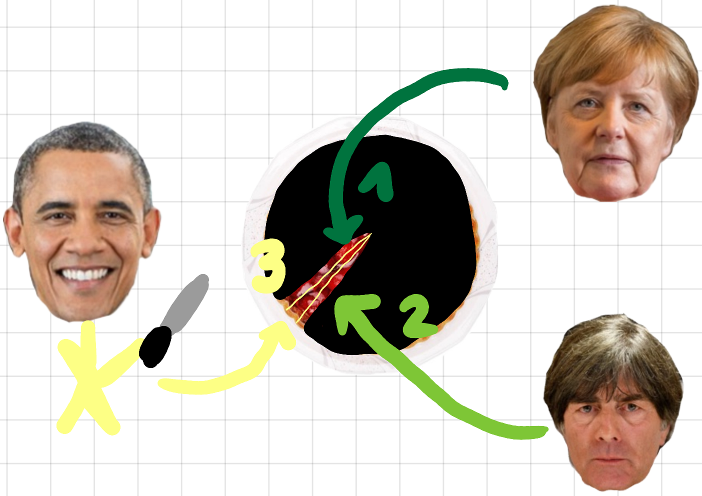
5. Schritt: Die Spieler nehmen in der Reihenfolge Nichtschneider - Spieler 1 - Schneider je 1 der 3 Teile.

Strategien: Die Spieler Nichtschneider & Spieler 1 wählen jeweils ein aus ihrer Sicht größtes Teil



 = Nicht-schneider

⟹  = Schneider



 = Nicht-schneider

⟹  = Schneider